Chương 1. MA TRẬN - ĐỊNH THỨC (8+4)

I. Ma trận

* Cho m, n nguyên dương. Ta gọi ***ma trận cỡ*** $m \times n$ là một bảng số gồm $m \times n$ số thực được viết thành m hàng, n cột có dạng như sau:

$$(a_{i,j})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

trong đó các số thực

$$a_{i,j}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$$

được gọi là ***các phần tử của ma trận***, chỉ số i chỉ hàng và chỉ số j chỉ cột của phần tử ma trận.

* Ma trận cỡ $1 \times n$ được gọi là ***ma trận hàng***, ma trận cỡ $m \times 1$ được gọi là ***ma trận cột***, ma trận cỡ $n \times n$ được gọi là ***ma trận vuông cấp*** n.

* Trên ma trận vuông cấp n, đường chéo gồm các phần tử

$$a_{i,i}, i = \overline{1,n}$$

được gọi là ***đường chéo chính***, đường chéo gồm các phần tử

$$a_{i,n+1-i}, i = \overline{1,n}$$

được gọi là ***đường chéo phụ*** của ma trận.

* Ma trận vuông cấp n có các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0, nghĩa là:

$$a_{i,j} = 0, \forall i \neq j$$

được gọi là ***ma trận chéo***.

* Ma trận chéo có

$$a_{i,i} = 1, i = \overline{1,n}$$

được gọi là ***ma trận đơn vị cấp*** n, ký hiệu I_n.

* Ma trận cỡ $m \times n$ có

$$a_{i,j} = 0, \forall i, j : i > j$$

được gọi là ***ma trận bậc thang***.

* Ma trận cỡ $m \times n$ có các phần tử đều bằng 0 được gọi là ***ma trận không***, ký hiệu $0_{m,n}$.

* Ta gọi ***ma trận chuyển vị***

$$A^T = (a_{j,i})_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{m,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

của ma trận

$$A = (a_{i,j})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

là ma trận có được từ A bằng cách chuyển hàng thành cột, cột thành hàng.

* Hai ma trận cùng cỡ $(a_{i,j})_{m\times n}$ và $(b_{i,j})_{m\times n}$ được gọi là ***bằng nhau*** nếu các phần tử ở từng vị trí đều bằng nhau:

$$a_{i,j} = b_{i,j}, \forall i = \overline{1,m}, \forall j = \overline{1,n}.$$

+ Tổng (hiệu) của hai ma trận cùng cỡ $m \times n$ là một ma trận cỡ $m \times n$, trong đó phần tử của ma trận tổng (hiệu) là tổng (hiệu) các phần tử ở vị trí tương ứng:

$$(c_{i,j})_{m\times n} = (a_{i,j})_{m\times n} \pm (b_{i,j})_{m\times n}$$

với

$$c_{i,j} = a_{i,j} \pm b_{i,j}, \forall i = \overline{1,m}, \forall j = \overline{1,n}.$$

+ Tích vô hướng của số thực α với ma trận cỡ $m \times n$ là ma trận cỡ $m \times n$, trong đó mỗi phần tử là tích của α với phần tử ở vị trí tương ứng của ma trận ban đầu:

$$(c_{i,j})_{m\times n} = \alpha.(a_{i,j})_{m\times n}$$

với

$$c_{i,j} = \alpha.b_{i,j}, \forall i = \overline{1,m}, \forall j = \overline{1,n}.$$

+ Tích vô hướng có tính phân bố với phép cộng các ma trận: $\alpha.(A+B) = \alpha.A + \alpha.B$, với phép cộng các hệ số: $(\alpha+\beta).A = \alpha.A + \beta.B$, có tính kết hợp:

$$\alpha.(\beta \cdot A) = (\alpha.\beta) \cdot A.$$

+ Tích của hai ma trận $A = (a_{i,j})_{m\times n}$ và $B = (b_{j,k})_{n\times q}$ là ma trận

$$C = A \times B = (c_{i,k})_{m\times q},$$

với

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k}, \forall i = \overline{1,m}, \forall k = \overline{1,q}.$$

Ví dụ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1+3.1+2.3 & 1.3-3.1+2.2 \\ 2.1+4.1+7.3 & 2.3-4.1+7.2 \\ 3.1+5.1+6.3 & 3.3-5.1+6.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 27 & 16 \\ 26 & 16 \end{pmatrix}$$

+ Phép nhân hai ma trận có tính kết hợp: $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$, tính phân phối đối với phép cộng:

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C;\ (A + B) \times C = A \times C + B \times C.$$

Ngoài ra, nếu A có cỡ $m \times n$, thì

$$A \times I_n = I_m \times A = A.$$

II. Định thức

* Cho $E = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Ta gọi ***hoán vị của tập*** E là một song ánh $f : E \to E$, ký hiệu

$$f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{pmatrix}$$

hay

$$(f(1), f(2), \ldots, f(n))$$

(có tất cả $n!$ hoán vị khác nhau).

Ví dụ. Cho $E = \{1, 2, 3\}$. Ánh xạ $f : E \to E$ xác định bởi: $f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2$ là một hoán vị của E, ký hiệu là

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

hoặc

$$(1, 3, 2).$$

* Cho một hoán vị

$$f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{pmatrix}$$

ta thành lập các cặp thứ tự

$$(f(i), f(j)), \forall i \neq j,$$

sẽ có C_n^2 cặp thứ tự như thế; một cặp $(f(i), f(j))$ được gọi là ***nghịch thế*** nếu

$$(i - j)(f(i) - f(j)) < 0.$$

Gọi $N(f)$ là số các nghịch thế của hoán vị f (có trong C_n^2 cặp thứ tự trên).

Ví dụ. Tìm số nghịch thế của hoán vị

$$f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Từ hoán vị này, ta có các cặp thứ tự

$$(3,2),(3,1),(3,5),(3,4),(2,1),(2,5),(2,4),(1,5),(1,4),(5,4),$$

trong đó ta có các nghịch thế:

$$(3,2),(3,1),(2,1),(5,4),$$

suy ra $N(f)=4$

* Cho ma trận $(A)_{n,n}$. ***Định thức của*** A là một số thực, ký hiệu và xác định như sau:

$$det(A)=\sum_{f\in S_n}(-1)^{N(f)}a_{1,f(1)}a_{2,f(2)}\cdots a_{n,f(n)}$$

trong đó S_n là tập tất cả $n!$ hoàn vị của n phần tử $\{1,2,\ldots,n\}$. Như vậy, định thức của ma trận A là một số:

+ bằng tổng đại số của $n!$ hạng tử dạng

$$a_{1,f(1)}a_{2,f(2)}\cdots a_{n,f(n)}$$

+ mỗi hạng tử là tích của n phần tử $a_{i,j}$ mà mỗi hàng, mỗi cột phải có một và chỉ một phần tử tham gia vào tích đó.
+ dấu của mỗi hạng tử phụ thuộc vào số nghịch thế của hoán vị tương ứng.

* Ta gọi ***định thức cấp 2*** là giá trị tính được từ bảng 2 hàng, 2 cột như sau:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}$$

* Ta gọi ***định thức cấp 3*** là giá trị tính được từ bảng 3 hàng, 3 cột như sau:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}+a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}-a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}-a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}$$

+ Để tính nhanh định thức cấp 3, ta viết cột thứ nhất và thứ hai tiếp theo vào bên phải bảng nói trên:

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{matrix}$$

thì 3 phần tử lấy dấu cộng là tích các phần tử nằm trên các đường chéo song song với đường chéo chính, ba phần tử lấy dấu trừ là tích các phần tử nằm trên các đường chéo song song với đường chéo phụ (quy tắc Serrhus)

* Ta gọi ***định thức cấp*** n là giá trị tính được từ bảng:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1}D_1 - a_{2,1}D_2 + \dots + (-1)^{n+1}a_{n,1}D_n$$

trong đó D_k là định thức cấp $n-1$ thu được từ bảng đã cho bằng cách bỏ cột thứ nhất và hàng thứ k, $k = \overline{1,n}$.

Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 14$$

+ Định thức không thay đổi nếu ta đổi hàng thành cột
+ Định thức đổi dấu nếu ta đổi chỗ hai hàng (hoặc hai cột) với nhau
+ Định thức có hai hàng (hoặc hai cột) tỷ lệ với nhau nhau thì bằng 0
+ Thừa số chung của một hàng hay cột có thể đưa ra ngoài dấu của định thức
+ Định thức không thay đổi nếu ta đồng thời cộng vào các phần tử của một hàng (hay một cột) nào đó các phần tử của một hàng (hay một cột) khác nhân với cùng một số.

Ví dụ. Giải phương trình:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

Định thức ở vế trái của phương trình là đa thức bậc n nên có không quá n nghiệm khác nhau. Thay $x = 0, x = 1, x = 2, \dots, x = n-1$ vào định thức, ta luôn có hai hàng với các phần tử bằng 1, nên định thức bằng 0. Vậy phương trình có n nghiệm $x = 0, x = 1, x = 2, \dots, x = n-1$.

* Định thức của ma trận vuông $A = (a_{i,j})_{n\times n}$, ký hiệu $\det(A)$ là định thức cấp n của bảng

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

và có tính chất:

+ $\det(\alpha A) = \alpha^n.\det(A)$
+ $\det(A \times B) = \det(A).\det(B)$

III. Ma trận nghịch đảo

* Ma trận $A = (a_{i,j})_{n\times n}$ được gọi là ***ma trận khả nghịch*** nếu tồn tại ma trận A^{-1} sao cho:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n.$$

Khi đó, ma trận A^{-1} được gọi là ***ma trận nghịch đảo*** của A.

\+ Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi

$$\det A \neq 0.$$

* Cho $A = (a_{i,j})_{m\times n}$. Một ***định thức con cấp*** k ***(***$1 \leq k \leq n$***)*** của A là một định thức tạo thành từ ma trận A bằng cách bỏ đi $m-k$ hàng và $n-k$ cột.

* Cho ma trận vuông cấp n khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Phần bù đại số của phần tử $a_{i,j}$, là số $\overline{A_{i,j}} = (-1)^{i+j} D_{i,j}$ trong đó $D_{i,j}$ là định thức cấp $n-1$ của bảng thu được từ ma trận A bằng cách gạch bỏ hàng thứ i và cột thứ j.

\+ Cho A là ma trận vuông khả nghịch cấp n và $\Delta = \det A \neq 0$. Khi đó ma trận nghịch đảo của A được xác định một cách duy nhất bởi:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\Delta}\left(\overline{A_{i,j}}\right)^T \\ &= \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \overline{A_{1,1}} & \overline{A_{2,1}} & \dots & \overline{D_{n,1}} \\ \overline{A_{1,2}} & \overline{A_{2,2}} & \dots & \overline{D_{n,2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{A_{1,n}} & \overline{A_{2,n}} & \dots & \overline{D_{n,n}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ví dụ. Ma trận nghịch đảo của

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

là:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

vì:

$$\Delta = \det A = (1)(1)(2)+(2)(1)(1)+(1)(-1)(1)-(1)(1)(1)-(2)(-1)(2)-(1)(1)(1) = 5 \neq 0$$

và:

$$\overline{A_{1,1}} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \overline{A_{1,2}} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \overline{A_{1,3}} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$\overline{A_{2,1}} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \overline{A_{2,2}} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \overline{A_{2,3}} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\overline{A_{3,1}} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \overline{A_{3,2}} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \overline{A_{3,3}} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

+ Tính chất:
  - Cho A khả đảo và $k \neq 0$, thì: $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$
  - Cho A, B cùng cấp và khả đảo, thì: $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$
  - Cho A khả đảo thì A^{-1} cũng khả đảo và $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

Phần I.4: **Hạng của ma trận**

* Ta gọi ***hạng của ma trận*** $A = (a_{i,j})_{m\times n}$, ký hiệu $r(A)$ là cấp cao nhất của các định thức con khác 0 của A.

+ Hạng của ma trận $0_{m\times n}$ là 0, hạng của ma trận $A = (a)$ với $a \neq 0$ là 1.
+ Hạng của ma trận không thay đổi qua ***các phép biến đổi sơ cấp*** sau đây:
  a. Đổi chỗ hai hàng hoặc hai cột cho nhau;
  b. Nhân một hàng (hay một cột) với một số khác 0;
  c. Cộng vào một hàng (hay một cột) với một hàng (hay một cột) khác nhân với một số.

Để tìm hạng của ma trận $A_{mtimesn}$, có thể dùng các phương pháp sau:

+ ***Phương pháp theo định nghĩa:*** tính các định thức con từ cấp 2 trở lên. Giả sử ma trận có 1 định thức con cấp r khác 0, tính tiếp các định thức cấp $r+1$, nếu tất cả đều bằng 0 thì kết luận hạng ma trận là r, nếu có định thức cấp $r+1$ khác 0 thì tính tiếp các định thức cấp $r+2$, cứ như thế đến định thức cấp lớn nhất

Ví dụ. Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ta có định thức con cấp 2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, và các định thức cấp 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

suy ra $r(A) = 2$

+ ***Phương pháp dùng phép biến đổi sơ cấp:*** biến đổi ma trận về dạng bậc thang

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,r} & \dots & b_{1,n} \\ 0 & b_{2,2} & \dots & b_{2,r} & \dots & b_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{r,r} & \dots & b_{r,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

với $b_{i,j} = 0, \forall i > j$ hay $i > r$ và $b_{ii} \neq 0, i = \overline{1,r}$ thì $r(A) = r(B) = r$.

Ví dụ. Tìm hạng ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow{h2-2h1;h3+2h1;h4-h1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{h4-h3;h2\leftrightarrow h3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

suy ra $r(A) = 3$

+ Ngoài ra, có thể ***tìm ma trận nghịch đảo qua các phép biến đổi sơ cấp***: lập ma trận khối $A|E$ (E cùng cỡ với A, thực hiện các phép biến đổi sơ cấp CHỈ TRÊN HÀNG, nếu đưa được về dạng $E|B$ thì B là nghịch đảo của A.

Ví dụ. $A|E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h2-2h1,h3-h1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{h1-h3,h2+h3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & | & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & | & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h2(\frac{1}{5})} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & | & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 2 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{h1+3h2,h3-2h2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$ thu được kết quả như cũ.

BÀI TẬP

1.1. Không tính, chứng minh các định thức sau chia hết cho 17:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 20 & 9 & 1 \\ 55 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

1.2. Chứng minh các đẳng thức sau đây (không tính định thức bằng định nghĩa):

a. $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$ với $xyz \neq 0$

b. $\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$

c. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)$

1.3. Tìm x sao cho:

a. $\begin{vmatrix} 3 & 3-x & -x \\ 2 & 7 & 3 \\ x+1 & 3x-7 & x \end{vmatrix} = 0$

b. $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0$

c. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 3 & 1 & x \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} < 0$

d. $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 3 \\ x+1 & 2 & -4 \end{vmatrix} > 0$

1.4. Tính các định thức sau: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$;

$\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ a & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} x^2+1 & xy & xz \\ xy & y^2+1 & yz \\ xz & yz & z^2+1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 4x^3 & 3x^2 & 2x & 1 \end{vmatrix}$;

$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & x & 1 & x \\ 1 & x & 2 & x \\ 2 & 1 & x & x \\ x & x & 2 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} x & 0 & y & 0 \\ 0 & z & 0 & t \\ y & 0 & z & 0 \\ 0 & t & 0 & x \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} a & x & x & -x & -x \\ x & 2a & a & 0 & 0 \\ x & a & 2a & 0 & 0 \\ -x & 0 & 0 & 2a & a \\ -x & 0 & 0 & a & 2a \end{vmatrix}$;

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & a & x \end{vmatrix}$;

$\begin{vmatrix} \cos(x_1-y_1) & \cos(x_1-y_2) & \dots & \cos(x_1-y_n) \\ \cos(x_2-y_1) & \cos(x_2-y_2) & \dots & \cos(x_2-y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(x_n-y_1) & \cos(x_n-y_2) & \dots & \cos(x_n-y_n) \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}$;

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

1.5. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. Tìm A^2, AB, A^{-1}.

1.6. Tìm các ma trận $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$; $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$; $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n$

1.7. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm $f(A)$ với $f(x) = x^2 - 4x + 3,\ f(x) = x^2 - 2x + 1$.

1.8.

a. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Tìm A^{-1}, B^{-1}.

2. Tìm $f(A), f(B)$ với $f(x) = x^2 - x - 1$

b. Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.9.

a. Tìm ma trận vuông cấp hai có bình phương bằng ma trận không.

b. Tìm ma trận vuông cấp hai có bình phương bằng ma trận đơn vị.

1.10. Tìm ma trận X sao cho:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; $X \times \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$; $X \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times X \times \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \times X \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$;

$X \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times X + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

1.11. Tìm hạng của ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & -5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

1.12. Biện luận theo a số hạng của các ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & a & -2 \\ 3 & -6 & (a+3)(a+7) \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & a & 1 & 3 \\ 1 & 2a & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & a & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & a^2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.13. Tìm các giá trị của m để:

a. $r(A) = 2$ với $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 13 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & 21 & 13 & m \end{pmatrix}$

b. $r(A) = 3$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 & 2m+1 \end{pmatrix}$

c. $r(A) = 3$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & m & 4 \end{pmatrix}$

d. $r(A) = 2$ với $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ m & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

e. $r(A) = 2$ với $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 & 1 \end{pmatrix}$

-ooOoo-

Chương 2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH (2+2)

I. Các định nghĩa

* Ta gọi ***hệ phương trình tuyến tính*** m ***phương trình*** n ***ẩn*** là hệ có dạng

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

trong đó $a_{i,j}, b_i$ $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ là các hệ số (thực hoặc phức), $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các ẩn số. Hệ phương trình tuyến tính được gọi là ***có nghiệm*** (hay ***tương thích***) nếu tập nghiệm của nó khác rỗng.

\+ Hệ (1) có thể được viết dưới dạng ma trận $AX = B$ trong đó:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a+2,n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots\, x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots\, b_m \end{pmatrix} \text{ hay}$$

dưới dạng ma trận mở rộng: $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a+2,n & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}$, khi đó hạng $r(A)$ của A được gọi là ***hạng của hệ phương trình (1)***

II. Hệ Cramer

* Hệ (1) có số phương trình bằng số nghiệm $(m = n)$ và định thức $det(A) = 0$ được gọi là ***hệ Cramer***.

\+ Hệ Cramer có nghiệm duy nhất được xác định như sau: $\forall i = \overline{1,n}, x_i = \dfrac{D_i}{D}$, trong đó $D = det(A)$, còn D_i là định thức thu được từ D bằng cách thay cột thứ i bằng cột hệ số tự do.

Ví dụ. Giải hệ: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \end{cases}$

Do $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$, hệ có nghiệm duy nhất $(1,1,1)$:

$$x = \frac{1}{30}\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1;\ y = \frac{1}{30}\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1;\ z = \frac{1}{30}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

III. Các định lý về nghiệm của hệ *(Kronecker-Kapeli)*

\+ (1) có nghiệm (tương thích) khi và chỉ khi $r(A) = r(\overline{A})$.

\+ (1) có nghiệm duy nhất (xác định) khi và chỉ khi $r(A) = r(\overline{A}) = n$.

\+ nếu $r(A) = r(\overline{A}) = r < n$ thì (1) có vô số nghiệm và các thành phần nhiệm phụ thuộc $n - r$ tham số tuỳ ý.

Ví dụ. Biện luận theo a số nghiệm của hệ: $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \end{cases}$

Dùng các phép biến đổi sơ cấp để xác định hạng của A và $\overline{A}$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{h1 \leftrightarrow h3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h3-ah1]{h2-h1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \xrightarrow{h3+h2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

+ Nếu $2 - a - a^2 = 0$, có 2 trường hợp:

  $a = 1$ thì: $\overline{A} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow r(A) = r(\overline{A}) = 1 < 3$, hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 2 tham số tuỳ ý.

  $a = -2$ thì: $\overline{A} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow r(A) = 2 < r(\overline{A} = 3$, hệ vô nghiệm.

+ Nếu $2 - a - a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1, a \neq -2$, thì $r(A) = r(\overline{A}) = 3$, hệ có nghiệm duy nhất.

IV. Phương pháp giải hệ

+ Các phép biến đổi sơ cấp cho hệ tương đương (tương ứng với các phép biến đổi theo hàng của ma trận mở rộng):
  - Đổi chỗ hai phương trình cho nhau (đổi chỗ hai hàng của ma trận)
  - Nhân hai vế của phương trình nào đó với một số khác 0 (nhân các phần tử trên một hàng của ma trận với một số khác 0)
  - Cộng từng vế của một phương trình với một phương trình khác nhân với một số (cộng một hàng với bội số một hàng khác)

1. Áp dụng định lý Carmer

Nếu hệ phương trình tuyến tính là hệ Cramer, có thể áp dụng định lý Carmer hoặc tìm ma trận A^{-1}, suy ra $X = A^{-1}B$.

Ví dụ. Giải bằng phương pháp ma trận nghịch đảo: $\begin{cases} 2x + 3y + 2z &= 9 \\ x + 2y - 3z &= 14 \\ 3x + 4y - z &= 16 \end{cases}$

Do $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ nề hệ là Cramer.

Với $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \overline{A_{1,1}} & \overline{A_{2,1}} & \overline{A_{3,1}} \\ \overline{A_{1,2}} & \overline{A_{2,2}} & \overline{A_{3,2}} \\ \overline{A_{1,3}} & \overline{A_{2,3}} & \overline{A_{3,3}} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{-6} \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

nên $X = A^{-1}B = -\dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, suy ra $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -2. \end{cases}$

2. Phương pháp Gauss (khử dần ẩn số)

Dùng các phép biến đổi sơ cấp theo các hàng, biến đổi ma trận mở rộng $\overline{A}$ thành ma trận $\overline{A_1}$ có nhiều phần tử 0 (như ma trận bậc thang), khi đó $r(\overline{A}) = r(\overline{A_1})$ và $r(A) = r(A_1)$.

+ nếu $r(A_1) < r(\overline{A_1})$, thì hệ vô nghiệm
+ nếu $r(A_1) = r(\overline{A_1}) = r$ thì lập hệ phương trình mới (tương đương hệ đã cho) sau kho bỏ các hàng mà mọi phần tử đều bằng 0. Giải hệ này (r phương trình, n ẩn số) bằng cách chọn r ẩn cơ bản và $n-r$ ẩn không cơ bản (thay bằng tham số tuỳ ý), nếu $r = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 1 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 9 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3-h_1]{h_2-h_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 12 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3-h_2]{h_2\times 1/2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

suy ra $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -1 \\ \qquad 3x_2 + \ x_3 &= 1 \\ \qquad\qquad x_3 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 &= -1 + 3x_2 - 2x_3 \\ 3x_2 &= 1 - x_3 \\ x_3 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{1}{3} \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - \ x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 7x_2 - \ x_3 &= -1 \\ 4x_1 + \ x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 1 \end{cases}$$

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3-4h_1]{h_2-2h_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 13 & -5 & 2 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_3-h_2}$$

$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \overline{B_1}$. Do $r(B) = r(B_1) = 2 < 3 = r(\overline{B_1}) = r(\overline{B})$, hệ vô nghiệm.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + \ 4x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 - \ x_2 + \ 2x_3 - \ x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + \ 8x_3 + \ x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 5x_4 &= 2 \end{cases}$$

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \\ 4 & 9 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_4-2h_1-h_2]{h_3-h_1-2h_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow[\text{bỏ } h_3, h_4]{h_2-2h_1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \end{pmatrix}$, tức là:

$$\begin{cases} x_1 + \ \ 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 & = 1 \\ \quad -11x_2 - 6x_3 - 7x_4 & = -2. \end{cases}$$

Chọn $x_3 = \alpha, x_4 = \beta$, ta suy ra: $\begin{cases} x_1 & = -\dfrac{14}{11}\alpha + \dfrac{2}{11}\beta + \dfrac{1}{11} \\ x_2 & = -\dfrac{6}{11}\alpha - \dfrac{7}{11}\beta + \dfrac{2}{11} \\ x_3 & = \alpha \\ x_4 & = \beta \end{cases}$

Ví dụ 2. Giải và biện luận theo a: $\begin{cases} ax + \ y + \ z & = 1 \\ x + ay + \ z & = a \\ x + \ y + az & = a^2 \end{cases}$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_3 \leftrightarrow h_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 - ah_1]{h_2 - h_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_3 + h_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1+a-a^2-a^3 \end{pmatrix}, \text{ suy ra:}$$

* Nếu $2 - a - a^2 = 0 \Leftrightarrow (a = 1) \vee (a = -2)$

+ Nếu $a = 1$, thì $\overline{A} \to (1\ 1\ 1\ 1)$, tương đương với $x + y + z = 1$ nên có vô số nghiệm dạng $(1 - \alpha - \beta; 1; 1)$ với α, β tuỳ ý.

+ Nếu $a = -2$, thì $\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3, \end{pmatrix}$ suy ra $r(A) = 2 < 3 = r(\overline{A})$ nên hệ vô nghiệm.

* Nếu $2 - a - a^2 \neq 0 \Leftrightarrow (a \neq 1) \wedge (a \neq -2)$

$$\overline{A} \xrightarrow[h_3 : 2-a-a^2]{h_2 : a-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & -1 & -a \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{(a+1)^2}{a+2} \end{pmatrix}, \text{ nên hệ đã cho tương ứng với:}$$

$$\begin{cases} x + y + az & = a^2 \\ \quad y - \ z & = -a \\ \quad\quad z & = \dfrac{(a+1)^2}{a-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = -\dfrac{a+1}{a-2} \\ x_2 & = \dfrac{1}{a+2} \\ x_3 & = \dfrac{(a+1)^2}{a+2} \end{cases}$$

Ví dụ 3. Giải và biện luận theo a, b: $\begin{cases} ax + \ \ y + z & = 1 \\ x + \ by + z & = 3 \\ x + 2by + z & = 4 \end{cases}$

$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix} = (1-a)b;\ D_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & b & 1 \\ 4 & 2b & 1 \end{vmatrix} = -2b + 1;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a; D_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 4 \\ 1 & b & 3 \\ 1 & 2b & 4 \end{vmatrix} = 4b - 2ab - 1$$

$+$ Nếu $D = (1-a)b \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ b \neq 0 \end{cases}$, hệ là Cramer, có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{-2b+1}{(1-a)b} \\ x_2 &= \dfrac{1}{b} \\ x_3 &= \dfrac{4b-2ab-1}{(1-a)b} \end{cases}$$

$+$ Nếu $a = 1$, hệ trở thành: $\begin{cases} x + \ \ y + z &= 1 \\ x + \ by + z &= 3 \\ x + 2by + z &= 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \quad y + z &= 4 \\ (b-1)y &= -1 \\ (2b-1)y &= 0 \end{cases}$, thì::

$-$ Nếu $2b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = \dfrac{1}{2}$: $\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ y &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 2 - \alpha \\ y &= 2 \\ z &= \alpha \end{cases}$, α tuỳ ý.

$-$ Nếu $2b - 1 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq \dfrac{1}{2}$: $\begin{cases} x + \quad y + z &= 4 \\ (b-1)y &= -1 \\ y &= 0 \end{cases}$ vô nghiệm vì $(b-1)0 = -1$

$+$ Nếu $b = 0$, hệ trở thành: $\begin{cases} ax - y + z &= 4 \\ x \quad + z &= 3 \\ x \quad + z &= 4 \end{cases}$ vô nghiệm

V. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

* ***Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất*** là hệ có dạng

$$AX = 0 \tag{II}$$

(B là ma trận toàn số 0), khi đó $r(A) = r(\overline{A})$, hệ luôn luôn có nghiệm:

$+$ nếu $r(A) = n$, hệ có nghiệm duy nhất ***nghiệm tầm thường*** $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$;

$+$ nếu $r(A) < n$, hệ có vô số nghiệm, các thành phần của nghiệm phụ thuộc $n - r(A)$ tham số, nên có nghiệm khác nghiệm không (***nghiệm không tầm thường***).

$+$ Với hệ có n phương trình, n ẩn số, hệ có nghiệm không tầm thương khi và chỉ khi $\det(A) \neq 0$ và có nghiệm duy nhất tầm thương khi và chỉ khi $\det(A) = 0$.

Ví dụ. Tìm a để hệ $\begin{cases} ax_1 + \ x_2 + \cdots + \ x_{n-1} + \ x_n &= 0 \\ x_1 + ax_2 + \cdots + \ x_{n-1} + \ x_n &= 0 \\ \ldots &= 0 \\ x_1 + \ x_2 + \cdots + ax_{n-1} + \ x_n &= 0 \\ x_1 + \ x_2 + \cdots + \ x_{n-1} + ax_n &= 0. \end{cases}$ có nghiệm không tầm thương

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & & & \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{h_1+\sum h_i}{\underset{i=1}{=}} \begin{vmatrix} a+n-1 & a+n-1 & \dots & a+n-1 & a+n-1 \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & & & \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & & & \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{h_i-h_1}{\underset{i=1}{=}} (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+n-1)(a-1)^{n-1}$$

Hệ có nghiệm không tầm thường khi $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1-n \\ a = 1. \end{array}\right.$

\+ nếu

$$(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{n-1}; \alpha_n) \text{ và } (\beta_1; \beta_2; \dots; \beta_{n-1}; \beta_n)$$

là nghiệm của hệ (II) thì

$$\forall h, k \in \mathbb{R}: \ (h\alpha_1 + k\beta_1; h\alpha_2 + k\beta_2; \dots; h\alpha_{n-1} + k\beta_{n-1}; h\alpha_n + k\beta_n)$$

cũng là nghiệm hệ (II).

\+ Trường hợp $r(A) < n$ (số ẩn của hệ) thì $r(A)$ ẩn cơ bản được biểu diễn qua $n - r(A)$ ẩn không cơ bản (lấy giá trị tuỳ ý). Nếu chọn $n - r(A)$ ẩn không cơ bản tương ứng theo $n - r(A)$ thành phần của $n - r(A)$ bộ số:

$$(1;0;0;\dots;0); (0;1;0;\dots;0); (0;0;1;\dots;0); \dots; (0;0;0;\dots;1)$$

thì $n - r(A)$ nghiệm cụ thể của hệ (II) được gọi là ***một hệ nghiệm cơ bản của hệ***.

Ví dụ. Tìm hệ nghiệm cơ bản của $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{h_3-h_1 \\ h_4-4h_1}]{h_2-2h_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{h2:2 \\ h_4-h_2}]{h_3-h_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$ ứng

với hệ:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_3 - x_4 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= -2x_2 \\ x_4 &= 2x_3. \end{cases}$$

+ Chọn $(x_2, x_3) = (1, 0)$, ta có: nghiệm $(-2; 1; 0; 0)$

+ Chọn $(x_2, x_3) = (0, 1)$, ta có: nghiệm $(0; 0; 1; 2)$

* ***Giải thích cách tìm ma trậnghịch đảo ở phần IV, chương 1***

Cho ma trận vuông $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ có $\det(A) \neq 0$. Xét hệ n phương trình $2n$ ẩn:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \dots + a_{1,n}x_n + x_{n+1} & = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \dots + a_{2,n}x_n \qquad + x_{n+2} & = 0 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + \dots + a_{3,n}x_n \qquad\qquad + x_{n+3} & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \dots + a_{n,n}x_n \qquad\qquad\qquad + x_{n+1} & = 0 \end{cases}$$

có dạng ma trận

$$A \times X + X' = 0 \Leftrightarrow A \times X = -X' \tag{1}$$

với $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ và $X' = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}$

vì $det(A) \neq 0, \exists A^{-1}$ nên: (1)$\Leftrightarrow X = -A^{-1} \times X' \Leftrightarrow X + A^{-1} \times X' = 0$ (*)

Hệ có ma trận hệ số: $\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & & & & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) = (A|E)$

Giả sử qua các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng, ta đưa được ma trận về dạng

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \dots & b_{1,n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \dots & b_{2,n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & \dots & b_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n,1} & b_{n,2} & b_{n,3} & \dots & b_{n,n} \end{array}\right) = (E|B)$$

ứng với hệ:

$$\begin{cases} x_1 & & & + b_{1,1}x_{n+1} + b_{1,2}x_{n+2} + b_{1,3}x_{n+3} + \cdots + b_{1,n}x2n & = 0 \\ & x_2 & & + b_{2,1}x_{n+1} + b_{2,2}x_{n+2} + b_{2,3}x_{n+3} + \cdots + b_{2,n}x2n & = 0 \\ & & x_3 & + b_{3,1}x_{n+1} + b_{3,2}x_{n+2} + b_{3,3}x_{n+3} + \cdots + b_{3,n}x2n & = 0 \\ \cdots\cdots\cdots & & & & \\ & & & x_n + b_{n,1}x_{n+1} + b_{n,2}x_{n+2} + b_{n,3}x_{n+3} + \cdots + b_{n,n}x2n & = 0 \end{cases}$$

có dạng $X + B \times X' = 0$, suy ra $B = A^{-1}$

BÀI TẬP

2.1. Giải các hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3x - 5y + 2z + 4t &= 2 \\ 7x - 4y + z + 3t &= 5 \\ 5x + 7y - 4z - 6t &= 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + y - z &= 1 \\ x - y + z &= 2 \\ 4x + 3y + z &= 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y - 3z &= -1 \\ 2x + y - 2z &= 1 \\ x + 2y - 3z &= 1 \\ x + y + z &= 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 3y - z + 5t &= 0 \\ 3x - y + 2z - 7t &= 0 \\ 4x + y - 3z + 6t &= 0 \\ x - 2y + 4z - 7t &= 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4t &= 4 \\ y - z + t &= -3 \\ x + 3y - 3t &= 1 \\ -7y + 3z + 3t &= -3 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + y - 3z &= 4 \\ x + 2y + z &= 1 \\ 3x - 3y + 2z &= 11 \end{cases}$ $\begin{cases} x + 3y + 4z &= 8 \\ 2x + y - z &= 2 \\ 2x + 6y - 5z &= 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y + 2z - 3t &= 1 \\ x + 4y - z - 2t &= -2 \\ x - 4y + 3z - 2t &= -2 \\ x - 8y + 5z - 2t &= -2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + 3y - z + t &= 2 \\ 2x + 3y + z &= 4 \\ 2x + 3y + 2z &= 3 \\ 2x + 3y &= 5 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + 4y + 5z + 7t &= 1 \\ 2x + 6y - 3z + 4t &= 2 \\ 4x + 2y + 13z + 10t &= 0 \\ 2x + 21z + 13t &= 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y + 5z &= -7 \\ x + 3y + z &= 5 \\ 2x + y + z &= 2 \\ 2x + 3y - 3z &= 14 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x - 5y + 4z + 3t &= 0 \\ 3x - 4y + 7z + 5t &= 0 \\ 4x - 9y + 8z + 5t &= 0 \\ 3x - 2y + 5z - 3t &= 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + y - 3z + t &= 1 \\ 2x - y + 7z - 3t &= 2 \\ x + 3y - 2z + 5t &= 3 \\ 3x - 2y + 7z - 5t &= 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2y + 3z - t &= 1 \\ 3x + 2y + z - t &= 1 \\ 2x + 3y + z + t &= 1 \\ 5x + 5y + 5z &= 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 8x + 6y + 5z + 2t &= 21 \\ 3x + 3y + 2z + t &= 10 \\ 4x + 2y + 3z + &= 8 \\ 3x + 5y + z + t &= 15 \\ 7x + 4y + 5z + 2t &= 18 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= -3 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ x_4 + x_5 &= -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 &= -2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 &= 5 \end{cases}$

2.2. Giải và biện luận theo a các hệ sau:

$$\begin{cases} (a+1)x + y + z = 1 \\ x + (a+1)y + z = a \\ x + y + (a+1)z = a^2 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = a \\ x + y + az + t = a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + az + t = a \\ x + ay - z + t = -1 \\ ax + ay - z - t = -1 \\ x + y + z + t = -a \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

2.3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} ax_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ ax_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = b. \end{cases}$

a. Tìm a để hệ trên là hệ Cramer; ứng với giá trị của a vừa tìm, tìm nghiệm của hệ theo b.

b. Tìm a, b để hệ trên vô nghiệm.

c. Tìm a, b để hệ trên có vô số nghiệm, tìm nghiệm tổng quát của hệ.

2.4. Tìm m để các hệ phương trình sau đây:

a. có nghiệm

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & -6 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ m \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ m \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z + 7t = 1 \\ 2x + 6y - 3z + 4t = 2 \\ 4x + 2y + 13z + 10t = m \\ 5x + 21z + 13t = 3 \end{cases}; \begin{cases} mx + 2y + 3z + 2t = 3 \\ 2x + my + 3z + 2t = 3 \\ 2x + 3y + mz + 2t = 3 \\ 2x + 3y + 2z + mt = 3 \\ 2x + 3y + 2z + 3t = m \end{cases}$$

b. vô nghiệm: $\begin{cases} 2x - y + z - t = 1 \\ 2x - y - 3t = 2 \\ 3x - z + t = -3 \\ 2x + 2y - 2z + mt = -6 \end{cases}; \begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases}$

c. vô định: $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1 + mx_2 + x + 3 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + \cdots + x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + mx_n = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z + t = 1 \\ 2x + 3y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z - t = 1 \\ 5x + 5y + 2z = 2m+1 \end{cases}; \begin{cases} 3x + 2y + z = 3 \\ mx + y + 2z = 3 \\ mx - 3y + z = -2 \end{cases}; \begin{cases} x + my - z + 2t = 0 \\ 2x - y + mz + 5t = 0 \\ x + 10y - 6z + t = 0 \end{cases}$$

d. có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x+3y-z+t &= 1\\ 3x+3y-z+mt &= 2\\ 2x+2y+z+t &= 3\\ 5x+3y+2t &= 1\end{cases};\quad \begin{cases} x+y+z+mt &= 1\\ x+my+z+t &= 1\\ mx+y+z+t &= 1\\ x+y+mz+t &= 1\end{cases};\quad \begin{cases} x+4y+3z+6t &= 0\\ -x+z+t &= 0\\ 2x+y-z &= 0\\ 2y+mx &= 0\\ 2x+5y+3z+7t &= 0\end{cases}$$

2.5. Chứng minh hệ sau có nghiệm duy nhất, tìm nghiệm đó:

$$\begin{cases} x_2+x_3+x_4+\cdots+x_{n-1}+x_n &= 1\\ x_1+x_3+x_4+\cdots+x_{n-1}+x_n &= 2\\ x_1+x_2+x_4+\cdots+x_{n-1}+x_n &= 3\\ \cdots\cdots\cdots & \\ x_1+x_2+x_3+x_4+\cdots+x_{n-1} &= n\end{cases}$$

2.6. Tìm điều kiện theo a để hệ sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x_1+ax_2 &= 0\\ x_1+(1+a)x_2+ax_3 &= 0\\ x_2+(1+a)x_3+ax_4 &= 0\\ x_3+(1+a)x_4+ax_5 &= 0\\ x_4+(1+a)x_5 &= 0\end{cases}$$

2.7. Biện luận theo a số nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} (a-3)x+y+z &= 0\\ x+(a-3)y+z &= 0\\ x+y+(a-3)z &= 0\end{cases};\quad \begin{cases} ax+ay+z &= a\\ ax+y+az &= 1\\ x+ay+az &= 1\end{cases};$$

$$\begin{cases} ax+ay+(a+1)z &= a\\ ax+ay+(a-1)z &= a\\ (a+1)x+ay+(2a+3)z &= 1\end{cases};\quad \begin{cases} x-y+az+t &= a\\ x+ay-z+t &= -1\\ ax+ay-z-t &= -1\\ x+y+z+t &= -a\end{cases}$$

2.8. Tìm nghiệm nguyên dương (nếu có) của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x+y+z &= 100\\ x+15y+25z &= 500\end{cases};\quad \begin{cases} x+2y+3z &= 14\\ 2x+3y-z &= 5\end{cases};$$

$$\begin{cases} x+3y-3z &= 1\\ 3x-3y+4z &= 4\end{cases};\quad \begin{cases} x-y+z+t &= 2\\ 2x+y-3z+2t &= 2\\ 3x-2y+z+t &= 3\end{cases}$$

2.9. Tìm các đa thức bậc 3 $f(x)$ biết:

a. $f(-1)=0$; $f(1)=4$; $f(2)=3$; $f(3)=16$;

b. $f(-1)=5$; $f(1)=5$; $f(3)=45$; $f(-4)=-25$.

2.10. Tìm nghiệm tổng quát và hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x - \ \ y + 5z + 7t &= 0 \\ 4x - 2y + 7z + 5t &= 0 \\ 2x - \ \ y + \ \ z - 5t &= 0 \end{cases}; \begin{cases} x + \ \ y - 4z &= 0 \\ 2x + 9y + 6z &= 0 \\ 3x + 5y + 2z &= 0 \\ 4x + 7y + 5z &= 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x + 2y + \ \ 4z - \ \ 3t &= 0 \\ 3x + 5y + \ \ 6z - \ \ 4t &= 0 \\ 4x + 5y - \ \ 2z + \ \ 3t &= 0 \\ 3x + 8y + 24z - 19t &= 0 \end{cases}; \begin{cases} x \qquad + 8z + 7t &= 0 \\ 2x + \ \ y + 4z + \ \ t &= 0 \\ 3x + 2y - \ \ z - 6t &= 0 \\ 7x + 4y + 6z - 5t &= 0 \end{cases}$$

2.11.

a. Trong một xí nghiệp sản xuất, có 15 công nhân được chia làm 3 bậc (I,II,III), hưởng lương tháng lần lượt là: 600.000, 500.000, 400.000 đồng. Mỗi tháng xí nghiệp phát 7,7 triệu đồng tiền lương. Hỏi trong xí nghiệp ấy, số công công mỗi bậc có thể là bao nhiêu?

b. Một hợp tác xã nông nghiệp có 300 ha đất, 850 công lao động và 65 triệu đồng tiền vốn dành cho sản xuất vụ hè thu với dự định trồng các loại cây I,II,III có chi phí sản xuất cho mỗi ha giao trồng như sau:

Loại cây	Vốn bằng tiền (đồng)	Lao động (công)
I	200.000	2
II	150.000	3
III	400.000	5

-ooOoo-

Chương 3

HÀM NHIỀU BIẾN & TÍCH PHÂN KÉP

I. Hàm nhiều biến

1. Khái niệm

* Cho $D \subset \mathbb{R}^2$. Một ánh xạ

$$\begin{aligned} f:\ & D \to \mathbb{R} \\ & (x, y) \mapsto f(x, y) = z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

được gọi là ***hàm hai biến xác định trên*** D, D được gọi là ***miền xác định của hàm hai biến*** $f(x, y)$.

Ví dụ.

\+ Miền xác định của hàm $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ là tập

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

(hình tròn tâm O bán kính 1).

\+ Miền xác định của hàm $z = f(x, y) = ln(x+y)$ là tập $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$ (nửa mặt phẳng nằm phía trên đường thẳng $y = -x$ trên mặt phẳng xOy.

* Cho hàm hai biến $z = f(x, y)$. Trên mặt phẳng Oxy, mỗi cặp (x, y) được biểu diễn bởi mọt điểm $M(x, y)$, nên ta có thể xem $z = f(x, y)$ là hàm các điểm $M(x, y)$, ký hiều $z = f(M)$.

* Cho hàm hai biến $z = f(x, y)$ có miền xác định D. Trong không gian $Oxyz$, xét các điểm $P(x, y, z)$ thỏa mãn $(x, y) \in D$ và $z = f(x, y)$. Khi M chạy trên miền D, các điểm P vạch trong không gian một mặt cong được gọi là ***đồ thị của hàm hai biến*** $x = f(x, y)$.

* Cho $D \subset \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n\}$. Một ánh xạ

$$\begin{aligned} f:\ & D \to \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

được gọi là ***hàm*** n ***biến*** $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ***xác định trên*** D (D được gọi là ***miền xác định***).

* Cho hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định trong khoảng hở U của $M_o(x_o, y_o)$ (không cần xác định tại M_o). Số L được gọi là ***giới hạn của*** $f(x, y)$ ***khi*** $M(x, y)$ ***dần đến*** $M_o(x_o, y_o)$ nếu với mọi dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ thuộc U dần đến $M_o(x_o, y_o)$, ta đều có: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) \to L$. Ta ký hiệu:

$$\lim_{\substack{x\to x_o \\ y\to y_o}} f(x, y) = L.$$

* Hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong miền D được gọi là ***liên tục tại*** $M_o(x_o, y_o) \in D$ nếu:

$$\lim_{\substack{x\to x_o \\ y\to y_o}} f(x, y) = f(x_o, y_o).$$

2. Đạo hàm và vi phân hàm nhiều biến

2.1. Đạo hàm riêng

* Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên khoảng hở U của $M_o(x_o, y_o)$, khi đó $\Delta x = x - x_o$ và $\Delta y = y - y_o$ được gọi lần lượt là ***số gia của biến số** x **và** y*, $\Delta_x z = f(x_o + \Delta x, y_o) - f(x_o, y_o)$ và $\Delta_y z = f(x_o, y_o + \Delta y)$ được gọi lần lượt là *số gia riêng của hàm* $z = f(x, y)$ *theo* x *và theo* y *tại* $M_o(x_o, y_o)$, còn $\Delta z = f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o)$ được gọi là ***số gia toàn phần của hàm** $z = f(x, y)$ **tại*** $M_o(x_o, y_o)$.

* Nếu $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ và $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$ tồn tại hữu hạn thì các giới hạn đó được gọi là các ***đạo hàm riêng của hàm** $x = f(x, y)$ **tại** (x_o, y_o) **của biến** x **và biến** y*, ký hiệu lần lượt là:

$$z'_x(x_o, y_o) = f'_x(x_o, y_o) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_o, y_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$
$$z'_y(x_o, y_o) = f'_y(x_o, y_o) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_o, y_o) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

* Nếu hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng theo biến x và biến y tại $\forall (x, y) \in D$, ta nói $z = f(x, y)$ ***có các đạo hàm riêng theo biến** x **và theo biến** y **trong miền*** D, ký hiệu là:

$$f'_x(x, y) = z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}; \qquad f'_y(x, y) = z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Ví dụ. Tính các đạo hàm riêng của

\+ $z = x^y, \ x > 0$:

$$z'_x = (x^y)'_x = yx^{y-1};$$
$$z'_y = (x^y)'_x = x^y. \ln x$$

\+ $z = e^{\frac{x}{y}}$:

$$z'_x = \left(e^{\frac{x}{y}}\right)'_x = e^{\frac{x}{y}}. \left[\frac{x}{y}\right]'_x = e^{\frac{x}{y}}.\frac{1}{y};$$
$$z'_y = \left(e^{\frac{x}{y}}\right)'_y = e^{\frac{x}{y}}. \left[\frac{x}{y}\right]'_y = e^{\frac{x}{y}}. \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2}.e^{\frac{x}{y}}$$

\+ $z = \text{Arctg}\, xy$;

$$z'_x = (\text{Arctg}\, xy)'_x = \frac{(xy)'_x}{1 + (xy)^2} = \frac{y}{1 + x^2y^2};$$
$$z'_y = \frac{(xy)'_y}{1 + (xy)^2} = \frac{x}{1 + x^2y^2}$$

2.2. Vi phân

* Vi phân toàn phần của hàm hai biến $z = f(x, y)$ là: $dz = z'_x dx + z'_y dy$, có thể ứng dụng để tính gần đúng giá trị của hàm số phức tạp theo công thức số gia hữu hạn như sau:

$$f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta x) \simeq f'_x(x_o, y_o) \cdot \Delta x + f'_y(x_o, y_o) \cdot \Delta y + f(x_o, y_o)$$

Ví dụ. Tính gần đúng các số sau: *a.* $A = (0.998)^{3.001}$; *b.* $B = \sqrt{(4.001)^2 + (2.997)^2}$

a. Xét $z = f(x,y) = x^y$ tại $M_o(1;3)$. Ta có:

+ $f(x,y) = x^y \Rightarrow f(1,3) = 3.1^2 = 3$
+ $f'_x(x,y) = yx^{y-1} \Rightarrow f'_x(1,3) = 3.1^2 = 3$
+ $f'_y(x,y) = x^y.\ln x \Rightarrow f'_y(1,3) = 1^3.\ln 1 = 0$

  Chọn $\Delta x = -0.002, \Delta y = 0.001$, khi đó:

$$\begin{aligned} A &= (1-0.002)^{3+0.001} = f(1-0.002, 3+0.001) = f(x_o+\Delta x, y_o+\Delta y) \\ &\simeq f'_x(x_o,y_o)\cdot\Delta x + f'_y(x_o,y_o)\cdot\Delta y + f(x_o,y_o) = 3\cdot(-0.002) + 0\cdot(0.001) + 1 = 0.994 \end{aligned}$$

b. Xét $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ tại $M_o(4,3)$. Ta có:

+ $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow f(4,3) = \sqrt{4^2+3^2} = 5$
+ $f'_x(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow f'_x(4,3) = \dfrac{4}{4^2+3^2} = \dfrac{4}{5} = 0.8$
+ $f'_y(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow f'_x(4,3) = \dfrac{3}{4^2+3^2} = \dfrac{3}{5} = 0.6$

  Chọn $\Delta x = 0.001, \Delta y = -0.003$, khi đó:

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{(4.001)^2+(2.997)^2} = \sqrt{(4+0.0001)^2+(3-0.003)^2} = f(x_o+\Delta x, y_o+\Delta y) \\ &\simeq f'_x(x_o,y_o)\cdot\Delta x + f'_y(x_o,y_o)\cdot\Delta y + f(x_o,y_o) \\ &= 0.8\cdot 0.001 + 0.6\cdot(-0.003) + 5 = 4.999 \end{aligned}$$

* Nếu các đạo hàm riêng z'_x, z'_y (được gọi là ***đạo hàm riêng cấp 1***) cũng có đạo hàm riêng thì các đạo hàm riêng đó được gọi là ***đạo hàm riêng cấp 2 của*** $z = f(x,y)$, được ký hiệu và xác định như sau:

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (z'_x)'_x; \\ z''_{xy} &= f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = (z'_x)'_y; \\ z''_{yx} &= f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = (z'_y)'_x; \\ z''_{yy} &= f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (z'_y)'_y \end{aligned}$$

+ Nếu $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trong miền D thì trong miền đó: $z''_{xy} = z''_{yx}$.

* Nếu $z = f(u,v)$ là hàm khả vi và $u = u(x,y), v = v(x,y)$ có các đạo hàm riêng u'_x, u'_y, v'_x, v'_y trong miền D thì trong miền đó tồn tại các đạo hàm riêng

$$\begin{aligned} z'_x &= z'_u\cdot u'_x + z'_v\cdot v'_x; \\ z'_y &= z'_u\cdot u'_y + z'_v\cdot v'_y \end{aligned}$$

Ví dụ. Cho $z = e^u \sin v$ với $u = xy, v = x^2 + y^2$. Tính z'_x, z'_y.

Vì: $z'_u = e^u \sin v$; $z'_v = e^u \cos v$; $u'_x = y$; $u'_y = x$; $v'_x = 2x$; $v'_y = 2y$, nên:

+ $z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = e^u \sin v \cdot y + e^u \cos v \cdot 2x = ye^{xy} \sin(x^2+y^2) + 2xe^{xy} \cos(x^2+y^2)$
+ $z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = e^u \sin v \cdot x + e^u \cos v \cdot 2y = xe^{xy} \sin(x^2+y^2) + 2ye^{xy} \cos(x^2+y^2)$

1.3. Cực trị của hàm hai biến

* Cho hàm $z = f(x, y)$ xác định, liên tục trong miền D. Ta nói z đạt ***cực đại (tương tự, cực tiểu) địa phương tại*** $M_o(x_o, y_o) \in D$ nếu tồn tại khoảng hở U của $M_o(x_o, y_o)$ trong D sao cho $f(x_o, y_o) \geq f(x, y)$ (tương tự, $f(x_o, y_o) \leq f(x, y)$) với mọi $(x, y) \in D$.

+ ***Quy tắc tìm cực trị***: Giả sử $z = f(x, y)$ có đạo hàm riêng liên tục đến cấp 2 trong khoảng hở chứa $M_o(x_o, y_o)$ và có $f'_x(x_o, y_o) = f'_y(x_o, y_o) = 0$. Đặt $A = f''_{xx}(x_o, y_o), B = f''_{xy}(x_o, y_o), C = f''_{yy}(x_o, y_o)$, thì:
  + Nếu $B^2 - AC < 0,\ A < 0$ thì $z = f(x, y)$ đạt cực đại tại (x_o, y_o);
  + Nếu $B^2 - AC < 0,\ A > 0$ thì $z = f(x, y)$ đạt cực tiểu tại (x_o, y_o);
  + Nếu $B^2 - AC > 0$ thì (x_o, y_o) không phải là điểm cực trị;
  + Nếu $B^2 - AC = 0$ thì không kết luận được.

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm số:

a. $z = f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$

b. $z = x^3 + y^3 - 3xy$

a. Ta có: $z'_x = 2x - y + 3$; $z'_y = -x + 2y + 2$; $z''_{xx} = 2$; $z''_{xy} = -1$; $z''_{yy} = 2$.

Giải $\begin{cases} z'_x &= 0 \\ z'_y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3 &= 0 \\ -x + 2y - 2 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -\dfrac{4}{3} \\ y &= \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Tại điểm $M_o\left(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$, ta có: $A = z''_{xx}\Big|_{M_o} = 2, B = z''_{xy}\Big|_{M_o} = -1, C = z''_{yy}\Big|_{M_o} = 2$, nên: $B^2 - AC = (-1)^2 - 2 \cdot 2 = -3 < 0$.

Suy ra hàm 2 biến đạt cực tiểu tại $M_o\left(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ với $z_{min} = -\dfrac{4}{3}$.

b. Ta có: $z'_x = 3x^2 - 3y$; $z'_y = 3y^2 - 3x$; $z''_{xx} = 6x$; $z''_{xy} = -3$; $z''_{yy} = 6y$.

Giải $\begin{cases} z'_x &= 0 \\ z'_y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y &= 0 \\ 3y^2 - 3x &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ x = y = 1 \end{array}\right.$

Tại điểm $M_o(0, 0)$, ta có: $A = z''_{xx}\Big|_{M_o} = 0, B = z''_{xy}\Big|_{M_o} = -3, C = z''_{yy}\Big|_{M_o} = 0$, nên: $B^2 - AC = 9 - 0 = 9 > 0$. Vậy $M_o(0, 0)$ không phải là cực trị.

Tại điểm $M_1(1, 1)$, ta có: $A = z''_{xx}\Big|_{M_o} = 6, B = z''_{xy}\Big|_{M_o} = -3, C = z''_{yy}\Big|_{M_o} = 6$, nên: $B^2 - AC = 9 - 36 = -27 < 0$. Suy ra hàm 2 biến đạt cực tiểu tại $M_1(1, 1)$ với $z_{min} = -1$.

BÀI TẬP

3.1.1. *Cho hàm* $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$. *Chứng minh:*

$$\lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} f(x, y)\right) = 1; \lim_{y \to 0}\left(\lim_{x \to 0} f(x, y)\right) = -1$$

trong khi đó $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ *không tồn tại.*

3.1.2. *Cho hàm* $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$. *Chứng minh:*

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0$$

, *trong khi đó* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ *không tồn tại.*

3.1.3. *Cho hàm* $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$. *Chứng minh* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$ *và* $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$ *không tồn tại, nhưng* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$

3.1.4. *Tính các giới hạn sau:*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\ ;\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4};\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\ ;\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$$

3.1.5. *Cho hàm*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Chứng minh $f"_{yx}(0,0) \neq f"_{xy}(0,0)$.

3.1.6. *Nghiên cứu cực trị địa phương của các hàm sau:*

a. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2 + 1$

b. $x = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2 - 1$

II. Tích phân hai lớp

1. Đinh nghĩa, tính chất

Xuất phát từ các bài toán thực tế (như tính thể tích vật thể hình trụ, đường kính một miền), ta có định nghĩa sau:

* Cho hàm $z = f(x,y)$ xác định trong miền hữu hạn D trong xOy. Phân hoạch D thành n miền nhỏ tuỳ ý có tên và diện tích $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. Trên mỗi ΔS_i $(i = 1,\ldots,n)$, lấy $M_i(x_i,y_i)$ tuỳ ý và gọi tổng

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta s_i$$

là ***tổng tích phân của*** $f(x,y)$ ***trong*** D.

Nếu khi đường kính lớn nhất của các miền Δs_i dần đến 0 ($\max d_i \to 0$) mà I_n dần đến một giới hạn xác định I, không phụ thuộc cách chia miền D (phân hoạch) và cách chọn $M_i(x_i, y_i)$ trong mỗi miền Δs_i thì giới hạn đó được gọi là ***tích phân hai lớp của*** $f(x,y)$ ***trong miền*** D và ký hiệu là:

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$$

trong đó $f(x,y)$ là ***hàm dưới dấu tích phân***, D là ***miền lấy tích phân***, ds là ***yếu tố diện tích***, x, y là ***biến tích phân***.

+ Khi tích phân hai lớp tồn tại, ta có thể chia D bởi lưới các đường song song với Ox, Oy, khi đó Δs_i là hình chữ nhật, yếu tố diện tích ds bằng dx, dy:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$$

+ Diện tích miền D được tính bằng:

$$\mathcal{S}(D) = \iint\limits_D dxdy$$

+ Tổ hợp tuyến tính những hàm khả tích trên D cũng khả tích trên D và:

$$\iint\limits_D [\alpha f_1(x,y) \pm \beta f_2(x,y)]dxdy = \alpha \iint\limits_D f_1(x,y)dxdy \pm \beta \iint\limits_D f_2(x,y)dxdy$$

+ Nếu $f(x,y)$ khả tích trên D thì $|f(x,y)|$ cũng khả tích trên D và:

$$\left| \iint\limits_D f(x,y)dxdy \right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$$

+ Chia D thành 2 miền D_1, D_2 rời nhau bởi một đường $\mathcal{L}$. Nếu $f(x,y)$ khả tích trên cả D_1, D_2 (kể cả biên $\mathcal{L}$) thì nó khả tính trên D và:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

+ Nếu $f(x,y)$ khả tích trên D và $m \leq f(x,y) \leq M, \forall (x,y) \in D$, thì:

$$\exists \mu \in [m, M] : \ \mu = \frac{\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)dxdy}{\mathcal{S}(D)}$$

+ Nếu $f(x,y), g(x,y)$ khả tích trên D và thoả mãn $f(x) \leq g(x)$ thì:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

2. Cách tính tích phân hai lớp

+ Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trên miền $D = \{a \leq x \leq b; \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ trong đó $\varphi(x)$ và $\psi(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)dy\right] dx$$

Ví dụ 1. Tính thể tích hình trụ giới hạn bởi các mặt:

$$x = 0,\ x = 1,\ y = -1,\ y = 1,\ z = 0,\ z = x^2 + y^2.$$

Ta có: $V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_{-1}^1 (x^2+y^2)dy\right] dx = \int_0^1 \left(2x^2 + \frac{2}{3}\right) dx = \frac{4}{3}$

Ví dụ 2. Tính thể tích hình trụ giới hạn bởi mặt

$$z = f(x,y) = xy^2,\ \text{mặt } z = 0,\ x = 0,\ x = 1,\ y = -2,\ y = 3.$$

Ta có: $V = \int_0^1 xdx \cdot \int_{-2}^3 y^2 dy = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 \frac{y^3}{3}\Big|_{-2}^3 = \frac{35}{6}$

Ví dụ 3. Tính thể tích hình trụ giới hạn bởi các mặt:

$$x = 1,\ x = 2,\ y = \frac{x^2}{2},\ y = x^2,\ z = 0,\ z = xy.$$

Ta có: $V = \iint\limits_D xydxdy = \int_1^2 \left[\int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} xydy\right] dx = \int_1^2 \frac{3x^5}{8}dx = \frac{63}{16}.$

Ví dụ 4. Tính $\iint\limits_D xdxdy$, với D là miền giới hạn bởi các đường $y = x$ và $y = x^2$.

Miền D được xác định: $D = \{0 \leq x \leq 1;\ x^2 \leq y \leq x\}$, *nên:*

$\iint\limits_D xdxdy = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^x xdy\right] dx = \frac{1}{12}.$

Ví dụ 5. Tính $I = \iint\limits_D (x-y)dxdy$, trong đó D được giới hạn bởi các đường

$$y = \pm 1,\ x = y^2,\ y = x + 1.$$

Miền D được xác định: $D = \{-1 \le y \le 1;\ y - 1 \le x \le y^2\}$, suy ra:

$$I = \int_{-1}^{1} \left[\int_{y-1}^{y^2} (x - y) dx \right] dy = \int_{-1}^{1} \left(\frac{y^4}{2} - y^3 + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} \right) dy = \frac{-7}{15}.$$

+ Cho $f(x, y)$ liên tục trên D đóng và bị chặn, là ảnh của D' qua ánh xạ $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$.

Nếu

$x(u, v), y(u, v)$ liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \forall (u, v) \in D'$$

thì:

$$\iint\limits_{D} f(x, y) dxdy = \iint\limits_{D'} f[x(u, v), y(u, v)] |J(u, v)| dudv$$

Chẳng hạn khi đặt $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ thì:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$$

khi đó:

$$\iint\limits_{D} f(x, y) dxdy = \iint\limits_{D'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

Ví dụ 6. Tính tích phân $I = \iint\limits_{D} e^{-x^2 - y^2} dxdy$ trong đó D là đường tròn đơn vị.

Ta có: $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 e^{-r^2} r dr = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right) d\varphi = \pi \left(1 - \frac{1}{e} \right).$

Ví dụ 7. Tính tích phân $I = \iint\limits_{D} (x + 2y) dxdy$, trong đó D là hình bình hành giới hạn bởi các đường

$$x + y = 1,\ x + y = 2,\ 2x - y = 1,\ 2x - y = 3.$$

Ta có: $D' = \{(u, v) :\ 1 \le u \le 2,\ 1 \le v \le 3\}$ *và* $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \neq 0$, *nên:*

$$I = \iint\limits_{D'} -\frac{1}{3} \left(\frac{u + v}{3} + \frac{4u - 3v}{3} \right) dudv$$

$$= -\frac{1}{9} \int_1^2 \left[\int_1^3 (5u - v) dv \right] du = -\frac{1}{9} \int_1^2 (10u - 4) du = -\frac{11}{9}$$

Ví dụ 8. Tính $I = \iint\limits_D ydxdy$ với D là miền:

a. Hình quạt tròn tâm O, bán kính a nằm trong góc phần tư thứ 2.

b. Miền giới hạn bởi các đường cong có phương trình trong hệ toạ độ cực là: $r = 2 + \cos\varphi,\ r = 1$.

a. $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^a r^2 dr = \frac{a^3}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\varphi d\varphi = \frac{a^3}{3}.$

b. $I = \int_0^{2\pi} \left[\int_1^{2+\cos\varphi} rdr\right] \sin\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (3 + 4\cos\varphi + \cos^2\varphi)\sin\varphi d\varphi = 0.$

Ví dụ 9. Tính $I = \iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}dxdy$ trong đó:

D là nửa trên của hình tròn $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ *thì* $D' = \{(r,\varphi):\ 0 \leq r \leq 2\cos\varphi,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$, *khi đó:*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2\cos\varphi} \sqrt{4 - r^2}rdr\right] d\varphi = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\varphi)d\varphi = \frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

III. Tích phân 3 lớp

1. Định nghĩa, tính chất

Cho f là một hàm bị chặn, xác định trên một tập V đo được trong $\mathbb{R}^3$. Chia V thành hữu hạn những tập V_i đo được, không có điểm trong chung. Lập tổng tích phân

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi,\eta,\tau)\Delta V_i \tag{1}$$

ở đây ΔV_i là thể tích tập V_i, và (ξ,η,τ) là một điểm tuỳ ý thuộc V_i.

* Gọi D là số lớn nhất trong các đường kính $d(V_i)$ của phép phân hoạch $\{V_i\}_{1\leq i\leq n}$. Nếu

$$\lim_{D\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi,\eta,\tau)\Delta V_i$$

tồn tại thì giá trị này được gọi là ***tích phân ba lớp của hàm*** f ***trên tập*** V và được ký hiệu là

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz,$$

hàm f được gọi là ***khả tính trên*** V.

\+ Tích phân ba lớp có các tính chất hoàn toàn tương tự như tích phân hai lớp.

2. Cách tính tích phân ba lớp

\+ Nếu miền lấy tích phân là một hình hộp

$$V = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3],$$

thì:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{a_1}^{b_1}\left[\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz\right)dy\right]dx$$

Ví dụ. Tính $I = \iiint\limits_V xyzdxdydz$ với $V = [0,1]\times[2,4]\times[5,8]$.

$$I = \int_0^1 xdx \cdot \int_2^4 ydy \cdot \int_5^8 zdz = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_2^4 \cdot \frac{z^2}{2}\Big|_5^8 = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot\frac{39}{2} = \frac{117}{2}$$

+ Nếu miền là một thể trụ mở rộng (giới hạn bởi 2 mặt $\psi_1(x,y), \psi_2(x,y)$, mặt trụ có đường sinh song song Oz, đường chuẩn là biên

$$D_{xy} = \{(x,y):\ a \le x \le y, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

với φ_1, φ_2 liên tục trên $[a,b]$ thì:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left(\int_{\psi_2(x,y)}^{\psi_1(x,y)} d(x,y,z)dz\right)dy\right]dx$$

Ví dụ. Tính $\iiint\limits_V (1-x-y)dxdydz$ với miền V giới hạn bởi các mặt phẳng toạ độ và mặt phẳng $x+y+z=1$.

Ta có: $V = \{(x,y,z):\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x, 0\le z\le 1-x-y\}$, nên:

$$I = \int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y}(1-x-y)dz\right)dy\right]dx = \int_0^1\left[\int_0^{1-x}(1-x-y)^2dy\right]dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{3}(1-x)^3(1-x^3)dx = \frac{1}{12}$$

* ***Đổi biến trong tích phân ba lớp:*** *Cho f liên tục trên miền đóng, đo được và bị chặn $V\subset\mathbb{R}^3$, với V là ảnh của V' qua đơn ánh* $\begin{cases} x = x(u,v,w)\\ y = y(u,v,w)\\ z = z(u,v,w).\end{cases}$ *Nếu các hàm số $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$ liên tục, có các đạo hàm riêng liên tục trên V' và nếu*

$$J(u,v,w) = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w\\ y'_u & y'_v & y'_w\\ z'_u & z'_v & z'_w\end{vmatrix} \ne 0$$

thì tại mọi điểm $(u,v,w) \in V'$, ta có:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]|J(u,v,w)|dudvdw$$

$+$ Nếu theo toạ độ trụ: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = r, \end{cases}$ thì:

$$J(r,\varphi,z) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

nên

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz$$

Ví dụ. Tính $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)zdxdydz$ trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt $x^2+y^2=1$ và $z=2$.

Hình trụ tròn xoay V được xác định bởi: $V = \{(r,\varphi,z) : \ 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le z \le 2\}$, suy ra:

$$I = \int_0^2 zdz \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^1 dr = \pi.$$

$+$ Nếu theo toạ độ cầu: $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$ thì:

$$J(r,\varphi,\theta) == \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\theta\sin\varphi & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

nên

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz == \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\varphi d\theta$$

Ví dụ. Tính $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$ trong đố V là miền giới hạn bởi mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$ và mặt nón $x^2=y^2-z^2=0$ $(z>0)$.

Giải hệ $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ x^2+y^2-z^2 &= 0, \end{cases}$ giao tuyến là đường tròn $\begin{cases} x^2+y^2 &= \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ z &= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

suy ra:

$$V = \{(r,\varphi,theta):\ 0\le r\le 1, 0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\}$$

và $f(x,y,z) = x^2+y^2 = r^2\sin\theta$, nên

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 r^4 dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{1}{5}2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos^2\theta)d(-\cos\theta) \\ &= \frac{2\pi}{5}\left(\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{8-5\sqrt{2}}{30}\pi \end{aligned}$$

* ***Ứng dụng của tích phân kép***

\+ Diện tích của một hình phẳng D đóng, đo được, bị chặn trong $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{S}(D) = \iint\limits_D dxdy$$

\+ Thể tích miền V đo được, đóng, bị chặn

$$\mathcal{V} = \iiint\limits_V dxdydz$$

Nếu V là hình trụ cong, xét D là hình chiếu của V xuống mặt phẳng, $z=f(x,y)$ là mặt trên hình trụ cong:

$$\mathcal{V} = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

Nếu V là thể trụ mở rộng, xét D là hình chiếu của D lên xOy, $z = \psi_1(x,y), z=\psi_2(x,y)$ là mặt dưới, mặt trên của V:

$$\mathcal{V} = \iiint\limits_D f(\psi_1(x,y),\psi_2(x,y))dxdy$$

Ví dụ 1. Tính diện tích hình giới hạn bởi các đường thẳng $x=1, x=2$ và các đường $y=\dfrac{a^2}{x}, y=\dfrac{2a^2}{x}$ $(x>0)$

$D = \{(x,y):\ 1 \leq x \leq 2, \dfrac{a^2}{x} \leq y \leq \dfrac{2a^2}{x}\}$, suy ra:

$$\mathcal{S}(D) = \iint\limits_D dxdy = \int_1^2 \left[\int_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{2a^2}{x}} dx\right] dx = \int_1^2 \left(\frac{2a^2}{x} - \frac{a^2}{x}\right) dx = a^2 \ln 2$$

Ví dụ 2. Tính thể tích vật thể V giới hạn bởi các mặt

$$x^2 + y^2 = 2,\ z = 4 - x^2 - y^2,\ z = 0.$$

V là hình trụ cong, mặt trên có phương trình $z = 4 - x^2 - y^2$, hình chiếu D của V lên mặt phẳng xOy là hình tròn $x^2 + y^2 \leq 2$. Vậy

$$\mathcal{V} = \iint\limits_D (4 - x^2 - y^2) dxdy = \int_0^{2\pi} \cdot \int_0^{\sqrt{2}} (4 - r^2) rdr = 6\pi$$

+ Cho S là mặt cong có phương trình $z = f(x,y)$, trong đó f liên tục, có đạo hàm riêng liên tục trên miền đóng, bị chặn, đo được, thì diện tích mặt cong $\mathcal{S}$ là:

$$\mathcal{S} = \iint\limits_D \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2} dxdy$$

Ví dụ. Tính diện tích phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = a^2$.

Mặt trụ cắt mặt cầu thành hai mảnh đối xứng nhau qua mặt phẳng xOy, mỗi mảnh này lại được các mặt phẳng toạ độ chia thành 4 mảnh bằng nhau. Với $z \geq 0$, ta có: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, suy ra $1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2 = \dfrac{a^2}{a^2 - x^2 = y^2}$, nên

$$\mathcal{S} = 8 \iint\limits_{x^2+y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy = 8x \int^{2\pi} d\varphi_0 \cdot \int_0^a \frac{rdr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 4\pi a^2$$

BÀI TẬP

3.2.1. *Tính*

$$\iint\limits_D x \ln y dxdy$$

với D là hình chữ nhật:

$$0 \leq x \leq 4,\ 1 \leq y \leq e.$$

3.2.2. *Tính*

$$\iint\limits_D (\cos^2 x + \sin^2 y) dxdy$$

với D là hình vuông:

$$0 \le x \le \frac{\pi}{4}, 0 \le y \le \frac{\pi}{4}.$$

3.2.3. *Tính*

$$I = \int_1^2 \left[\int_x^{x^2} (2x - y)dy \right] dx.$$

3.2.4. *Tính*

$$\iint\limits_D (x - y)dxdy$$

với D là hình giới hạn bởi:

$$y = 2 - x^2,\ y = 2x - 1.$$

3.2.5. *Tính*

$$\iint\limits_D (x + 2y)dxdy$$

với D là hình giới hạn bởi các đường thẳng:

$$y = x,\ y = 2x, x = 2,\ x = 3.$$

3.2.6. *Tính*

$$\iint\limits_D e^{x+\sin y} \cos y dxdy$$

với D là hình chữ nhật:

$$0 \le x \le \pi,\ 1 \le y \le \frac{\pi}{2}.$$

3.2.7. *Tính*

$$\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$$

với D là miền giới hạn bởi các đường

$$y = x,\ x = 0,\ y = 1,\ y = 2.$$

3.2.8. *Tính*

$$\iint\limits_D \ln(x^2 + y^2)dxdy$$

với D là miền hình vành khăn giứx hai đường tròn

$$x^2 + y^2 = e^2 \text{ và } x^2 + y^2 = e^4.$$

3.2.9. *Tính*

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$$

với miền D giới hàn bởi đường tròn $x^2+y^2=2ax$.

3.2.10. *Tính*

$$\iint\limits_D x^3y dxdy$$

với D là miền giới hạn bởi các đường

$$y=0 \text{ và } y=\sqrt{2ax-x^2}.$$

3.2.11. *Tính*

$$\iint\limits_D \sin(x+y)dxdy$$

với D là miền giới hạn bởi các đường

$$y=0,\ y=x,\ x+y=\frac{\pi}{2}.$$

3.2.12. *Tính*

$$\iint\limits_D x^2(y-x)dxdy$$

với D là miền giới hạn bởi các đường

$$x=y^2 \text{ và } y=x^2.$$

3.2.13. *Tính*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

với D là miền giới hạn bởi đường

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

còn hàm dưới dấu tích phân

$$f(x,y)=\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} tdt.$$

3.2.14. *Tính*

$$\iint\limits_D r^2 dr d\varphi$$

với D là miền:
a. *Các đường tròn $r = a$ và $r = 2a$.*
b. *Đường $r = a\sin 2\varphi$.*

3.2.15. *Tính*

$$\iint\limits_D r\sin\varphi dr d\varphi$$

với D là miền:
a. *Quạt tròn giới hạn bởi các đường $r = a$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, $\varphi = \pi$.*
b. *Nửa đường tròn $r \leq 2a\cos\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$.*
c. *Nửa đường tròn $r = 2 + \cos\varphi$ và $r = 1$.*

3.2.16. *Sử dụng công thức đổi biến trong toạ độ cực, tính các tích phân:*
a. $\displaystyle\int_0^R \left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1 + x^2 + y^2)dy\right] dx$
b. $\displaystyle\int_0^R \left[\int_{-\sqrt{Rx-x^2}}^{\sqrt{Rx-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dy\right] dx$

3.2.17.
a. *Tính*

$$\int_0^1 \left[\int_x^{2x} dy\right] dx$$

bằng cách dùng các biến mới $\begin{cases} x = u(1-v) \\ y = uv \end{cases}$
b. *Tính*

$$\iint\limits_D dxdy$$

nếu D giới hạn bởi các đường

$$xy = 1,\ xy = 2,\ y = x,\ y = 3x.$$

3.2.18. *Tính các tính phân ba lớp sau:*
a. $I = \displaystyle\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz$ *với V giới hạn bởi mặt* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.
b. $I = \displaystyle\iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz$, *với V được giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 2$.*
c. $I = \displaystyle\iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz$, *với V được giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$.*

3.2.19. *Tính* $I = \iiint\limits_V xyzdxdydz$, *với* V *nằm trong góc phần tám thứ nhất, giới hạn bởi các mặt sau, với* $0 < a < b, 0 < \alpha < \beta, 0 < m < n$:

$$z = \frac{x^2 + y^2}{m}, z = \frac{x^2 + y^2}{n}, xy = a^2, xy = b^2, y = \alpha x, y = \beta x$$

-ooOoo-

Chương 4

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

I. Phương trình vi phân cấp 1

1. *Khái niệm chung*

* Ta gọi ***phương trình vi phân cấp 1*** là phương trình có dạng

$$F(x, y, y') = 0 \tag{I}$$

hoặc

$$y' = f(x, y) \tag{I$_o$}$$

trong đó x là biến số, y là hàm của x, và y' là đạo hàm của y.

* Nếu có hàm $y = \psi(x)$ thỏa mãn phương trình (I) hay (I_o) thì $y = \psi(x)$ được gọi là ***nghiệm của phương trình*** (I) ***hay*** (I_o).

* Nếu có hàm $y = \psi(x, C)$ hoặc hệ thức $\Phi(x, y, C) = 0$ thỏa mãn (I) hay (I_o) với C tùy ý trong miền nào đó của $\mathbb{R}$, và với mỗi điều kiện đầu $y(x_o) = y_o$ với (x_o, y_o) thuộc miền xác định của phương trình, chỉ có duy nhất giá trị $C = C_o$ làm cho $y = \psi(x, C_o)$ hay $\Phi(x, y, C_o) = 0$ thỏa mãn điều kiện đầu, thì $y = \psi(x, C)$ hoặc $\Phi(x, y, C) = 0$ được gọi là ***nghiệm tổng quát của phương trình*** (I) ***hay*** (I_o).

* Nếu $y = \psi(x, C)$ hay $\Phi(x, y, C) = 0$ là nghiệm tổng quát của (I) hay (I_o), cho $C = C_o$ (giá trị cụ thể xác định) thì $y = \psi(x, C_o)$ hay $\Phi(x, y, C_o) = 0$ được gọi là ***nghiệm riêng của*** (I) ***hay*** (I_o). Nếu nghiệm $y = \psi(x)$ không phải là nghiệm riêng nhận từ nghiệm tổng quát với bất kỳ giá trị C nào (kể cả $C = \pm\infty$) thì ta gọi nó là ***nghiệm kỳ dị của*** (I) ***hay*** (I_o).

\+ ***(Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm)***: *Cho phương trình (I_o). Nếu $f(x, y)$ liên tục trong miền nào đó chứa điểm (x_o, y_o) thì tồn tại ít nhất một nghiệm $y = \psi(x)$ sao cho $y_o = \psi(x_o)$ và nếu $f'_y(x, y)$ liên tục tại (x_o, y_o) thì $y = \psi(x)$ tồn tại duy nhất.*

2. *Các loại phương trình vi phân cấp 1*

2.1. Phương trình biến số phân ly

Là phương trình mà nếu thay $y' = \dfrac{dy}{dx}$ thì có thể biến đổi về dạng $f_1(y)dy = f_2(x)dx$. Lấy tích phân bất định 2 vế thì giải được phương trình.

Ví dụ 1. Giải phương trình:

$$ydy = (x^2 + 1)dx.$$

Lấy tích phân hai vế của phương trình đã cho:

$$\int ydy = \int (x^2 + 1)dx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + x + \frac{C}{2} \Leftrightarrow y^2 = \frac{2}{3}x^3 + 2x + C$$

Ví dụ 2. Giải phương trình:

$$(y - x^2y)dy + (xy^2 + x)dx = 0.tag1$$

Ta có: $$(1) \Leftrightarrow y(x^2 - 1)dy = x(y^2 + 1)dx \tag{2}$$

+ Nếu $x^2 - 1 \equiv 0 \Leftrightarrow x \equiv \pm 1$ thì $dx = 0$, nên (2) thỏa mãn. Vậy $x = \pm 1$ là nghiệm của (1).

+ Nếu $x^2 - 1 \not\equiv 0 \Leftrightarrow x \not\equiv \pm 1$: (2)$\Leftrightarrow \dfrac{y}{y^2+1}dy == \dfrac{x}{x^2-1}dx$. Lấy tích phân 2 vế:

$$\int \frac{ydy}{y^2+1} = \int \frac{xdx}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln|y^2+1| = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \frac{1}{2}\ln|C|$$

$\Leftrightarrow y^2 + 1 = C(x^2-1)$ $(\forall C \neq 0)$. Vậy (1) có nghiệm: $\left[\begin{array}{l} y^2+1 = C(x^2-1), \forall C \neq 0 \\ \quad x = \pm 1 \end{array}\right.$

Ví dụ 3. Giải phương trình:

$$y' = 3x^2 y \tag{1}$$

Ta có: $$(1) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 y \Leftrightarrow dy = 3x^2 y dx \tag{2}$$

+ Nếu $y \equiv 0$ thì $y' = 0$, nên (2) thỏa mãn. Vậy $y = 0$ là nghiệm của (1).

+ Nếu $y \not\equiv 0$: (2)$\Leftrightarrow \dfrac{dy}{y} = 3x^2 dx$. Lấy tích phân 2 vế:

$$\ln|y| = x^3 + \ln|C| \Leftrightarrow \ln|y| = \ln|Ce^{x^3}| \Leftrightarrow y = Ce^{x^3},\ \forall C \neq 0$$

Vậy (1) có nghiệm: $y = Ce^{x^3}$ (với C tùy ý).

2.2. Phương trình vi phân đẳng cấp cấp 1

Là phương trình có dạng $y' = f(x, y)$ với $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y), \forall \lambda \neq 0$.

Đặt $y = ux$, ta có: $u'x + u = y' = f(x, y) = g(u)$, ta đưa về phương trình có biến số phân ly $u'x = g(u) - u$.

Ví dụ 6. Giải phương trình:

$$y' = \frac{x+y}{x-y} \tag{1}$$

Đặt $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$, ta có:

(1)$\Leftrightarrow u'x + u = \dfrac{x+ux}{x-ux} \Leftrightarrow u'x = \dfrac{1+u}{1-u} - u \Leftrightarrow \dfrac{1-u}{1+u^2}du = \dfrac{dx}{x}$.

Lấy tích phân 2 vế:

$$\int \frac{du}{1+u^2} - \frac{1}{2}\int \frac{2udu}{1+u^2} = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|C| \Leftrightarrow \operatorname{arctg} u - \frac{\ln|1+u^2|}{2} = \frac{\ln|Cx^2|}{2}$$

Vậy (1) có nghiệm:

$$2\text{Arctg}\,\frac{y}{x} = \ln|C(x^2+y^2)|, \forall C \neq 0$$

Ví dụ 5. Giải phương trình:

$$y' = \frac{y^2}{x^2} - 2 \tag{1}$$

Đặt $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow u'x + u = u^2 - 2 \Leftrightarrow u'x = u^2 - u - 2 \tag{2}$$

+ Nếu $u^2 - u - 2 \equiv 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -1 \\ u = 2 \end{array}\right.$ thì $u' = 0$, (2) thỏa mãn, vậy $\left[\begin{array}{l} y = -x \\ y = 2x \end{array}\right.$ là các nghiệm của (1)

+ Nếu $u^2 - u - 2 \not\equiv 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} u & \neq -1 \\ u & \neq 2 \end{array}\right.$ thì (2) tương đương với:

$$\frac{du}{u^2 - u - 2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-2}{u-1}\right| + \frac{1}{3}\ln C \Leftrightarrow \ln\left|\frac{u-2}{u+1}\right| = Cx^3$$

$\Leftrightarrow y - 2x = Cx^3(y+x), \forall C \neq 0$. Suy ra các nghiệm của (1) là: $\left[\begin{array}{c} y - 2x = Cx^3(y+x) \\ y = -x \end{array}\right.$ với C tùy ý.

2.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Là phương trình có dạng $y' + p(x)y = q(x)$ trong đó $p(x), q(x)$ là các hàm liên tục trên $[a, b]$.

Cách giải thực hiện qua các bước:

- Giải phương trình tuyến tính thuần nhất ($q(x) = 0$), ta có: $y \equiv 0$ hoặc $\frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx}$, vậy nghiệm là: $\overline{y} = Ce^{-\int p(x)dx}$
- Tìm nghiệm riêng y^* của phương trình không thuần nhất ($q(x) \neq 0$) bằng cách đặt $y^* = C(x).u(x)$ với $u(x) = e^{-\int p(x)dx}$, suy ra

$$y^* = e^{-\int p(x)dx}.\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

- lập nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất dạng $y = \overline{y} + y^*$

Ví dụ 6. Giải phương trình:

$$y' - 2xy = x$$

+ Giải phương trình thuần nhất $y' - 2xy = 0$, ta có nghiệm:
$y = 0$ hoặc $\frac{dy}{y} = 2xdx \Rightarrow \ln y = x^2 + \ln C \Rightarrow \overline{y} = Ce^{x^2}$.

+ Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là:

$$y^* = e^{x^2}.\int x.e^{-x^2}dx = e^{x^2}.\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Vậy (1) có nghiệm tổng quát: $y = \overline{y} + y^* = Ce^{x^2} - \frac{1}{2}$ với C tùy ý.

Ví dụ 7. Giải phương trình:

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

+ Giải phương trình thuần nhất $y' + 2xy = 0$, ta có nghiệm:
$y = 0$ hoặc $\frac{dy}{y} = -2xdx \Rightarrow \ln y = -x^2 + \ln C \Rightarrow \overline{y} = Ce^{-x^2}$.

+ Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là:

$$y^* = e^{-x^2}.\int x.e^{-x^2}.e^{x^2}dx = e^{-x^2}.\int xdx = \frac{x^2e^{-x^2}}{2}.$$

Vậy (1) có nghiệm tổng quát là: $y = \overline{y} + y^* = Ce^{-x^2} + \dfrac{x^2e^{-x^2}}{2}$ với C tùy ý.

2.4. Phương trình Bernoulli

Là phương trình có dạng $y' + p(x)y = q(x).y^\alpha$.

Để giải, giả thiết $y \not\equiv 0$, chia 2 vế cho y^α, rồi đặt $z = \dfrac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ (là hàm theo x, $z \not\equiv 0$), giải phương trình tuyến tính cấp 1 theo z.

Ví dụ 8. Giải phương trình:

$$y' + 2xy = 2x^3y^3.$$

+ Nếu $y \equiv 0$ thì $y' = 0$: (1) thỏa mãn nên $y = 0$ là nghiệm của phương trình

+ Nếu $y \not\equiv 0$ (1)$\Rightarrow$ $y'y^{-3} + 2xy^{-2} = 2x^3$. Đặt $z = -\dfrac{1}{2}y^{-2}$ (là hàm theo x, $z \not\equiv 0$), thì: $z' = y'y^{-3}$, phương trình trở thành $\qquad z' - 4xz = 2x^3 \qquad$ (3)

Giải (3). Phương trình thuần nhất:

$$z' - 4xz = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} = 4xdx \Rightarrow \overline{z} = Ce^{2x^2}$$

và nghiệm riêng

$$z^* = e^{2x^2}\int 2x^3e^{-2x^2}dx = e^{2x^2}\left[-\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)e^{-2x^2}\right] = \frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{2}\right).$$

Vậy (3) có nghiệm tổng quát: $z = \overline{z} + z^* = Ce^{2x^2} - \dfrac{1}{2}\left(x^2+\dfrac{1}{2}\right)$, nên (1) có nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{y^2} = -2Ce^{2x^2} + x^2 + \dfrac{1}{2} \\ y = 0 \end{array}\right., \text{ với } C \text{ tùy ý.}$$

BÀI TẬP

4.1.1. *Giải các phương trình vi phân sau (dạng đưa về biến số phân ly):*

$(xy^2 - x)dx + (y + x^2y)dy = 0$; $\quad y' + \sin\dfrac{x+y}{2} - \sin\dfrac{x-y}{2} = 0$; $\quad y' = 2x + y + 4$;

$y' = \sqrt{y - x + 1}$; $\quad y' = e^{x+y} - 1$; $\quad xy' = e^y - 1$; $\quad \dfrac{2x^2}{1+2x^2}dx + \dfrac{5y}{y^2+1}dy = 0$;

$(1 + e^{2x})y^2dy = e^x dx$ *(biết $y(0) = 0$)*; $\quad y' = e^{y-4x}$ *(biết $y(1) = 1$)*

4.1.2. *Giải các phương trình vi phân sau (dạng đẳng cấp cấp 1):*

$y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$; $\quad y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$; $\quad xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$; $\quad y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$;

$(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$; $\quad xy' = y - \sqrt{xy}$; $\quad y' = \dfrac{y}{x}\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right)$; $\quad y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$;

$y' = \frac{y}{x} + \cos^2\frac{y}{x}$; $\quad x^3y' = y(x^2+y^2)$; $\quad y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$ *(biết* $y(1) = \frac{\pi}{2}$*)*;

$xy' - y = xtg\frac{y}{x}$ *(biết* $y(1) = \frac{\pi}{2}$*)*; $\quad y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$ *(biết* $y(-1) = 1$*)*;

$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^3$ *(biết* $y(-1) = 1$*)*;

4.1.3. *Giải các phương trình vi phân sau (dạng tuyến tính cấp 1):*

$y' + 2y = 4x$; $\quad (1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$; $\quad xy' - \frac{y}{1+x} = x$;

$xy' + y = x^2\cos x$; $\quad y' + 2xy = xe^{-x^2}$; $\quad y'\cos x + y\sin x = 1$;

$xy' - xy = (1+x^2)e^x$; $\quad y' + e^x y = e^{2x}$; $\quad y' - \frac{1}{x\ln x}y = x\ln x$; $\quad y' - \frac{2}{x}y = 4x^2$;

$y' + xy = 3x$; $\quad y' + \frac{y}{x} = 3x^3$; $\quad y' + 2y = \cos x$; $\quad y' - 2y = \sin x$;

$xy' + y = e^x$ *(biết* $y(1) = 0$*)*; $\quad (x+1)xy' - y = x(x+1)$ *(biết* $y(1) = 0$*)*

II. Phương trình vi phân cấp 2

1. Khái niệm chung

* Ta gọi ***phương trình vi phân cấp 2*** là phương trình có dạng

$$F(y'', y', y, x) = 0 \tag{II}$$

hay

$$y'' = f(y', y, x) \tag{II$_o$}$$

trong đó y là hàm số theo biến x, còn y', y'' là đạo hàm cấp 1,2 của y, và ***nghiệm của phương trình*** là hàm $y = \psi(x)$ hay $\Phi(x, y) = 0$ thỏa mãn phương trình đó.

* Hàm $y = \psi(x, C_1, C_2)$ hoặc $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ thỏa mãn phương trình (II) hay (II_o) với C_1, C_2 là hằng số tùy ý trong tập con nào đó của $\mathbb{R}$, và với mỗi điều kiện $y(x_o) = y_o$ và $y'(x_o) = y'_o$ ta tìm được duy nhất cặp số C_{10}, C_{20} sao cho $y = \psi(x, C_{10}, C_{20})$ hay $\Phi(x, y, C_{10}, C_{20}) = 0$ thỏa (II) hay (II_o) được gọi là ***nghiệm tổng quát của các phương trình đó***.

* Nếu $y = \psi(y, C_1, C_2)$ hay $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ là nghiệm tổng quát của (II) hay (II_o), cho $C_1 = C_{01}, C_2 = C_{02}$ với C_{01}, C_{02} là hai số xác định cụ thể thì $y = \psi(x, C_{01}, C_{02})$ hay $\Phi(x, y, C_{01}, C_{02}) = 0$ được gọi là ***nghiệm riêng của phương trình đó***.

\+ ***(Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm)***: *Trong phương trình* (II_o)*, nếu hàm* $f(y', y, x)$ *liên tục trong miền nào đó chứa điểm* (y'_o, y_o, x_o) *thì tồn tại một nghiệm* $y = y(x)$ *của* (II_o) *sao cho* $y + o = y(x_o), y'_o = y'(x_o)$ *và nếu* $f'_y.f'_{y'}$ *cũng liên tục trong miền chứa điểm* (y'_o, y_o, x_o) *thì nghiệm ấy là duy nhất.*

2. Các loại phương trình vi phân cấp 2 thường gặp

2.1. Phương trình vi phân cấp 2 giảm cấp được

\+ *Phương trình có dạng* $y'' = f(x)$ *(thiếu* y, y'*)*

Cách giải: tích phân 2 lần.

Ví dụ 1. Giải phương trình:

$$y'' = x + 1.$$

Ta có: $y' = \int (x+1)dx = \dfrac{x^2}{2} + x + C_1$, suy ra:

$y = \int \left(\dfrac{x^2}{2} + x + C_1 \right) dx = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$ với C_1, C_2 tùy ý.

\+ *Phương trình có dạng $y'' = f(y', x)$* (thiếu y)

Cách giải: đặt $y' = z$ (hàm theo x) $\Rightarrow y'' = z'$. Nên: $z' = f(z, x)$ là phương trình cấp 1 của z theo x, giải ra nghiệm tổng quát $z = \psi(x, C_1)$, thay $z = y'$, ta có: $y' = \psi(x, C_1)$ giải ra nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu.

Ví dụ 2. Giải phương trình:

$$y'' = y' + x.$$

Đặt $y' = z$ (hàm theo x) $\Rightarrow y'' = z'$, suy ra $z' - z = x$. Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 của hàm z theo x với $p(x) = -1, q(x) = x$ nên có nghiệm:

$$z = \left[\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C_1 \right] e^{-\int p(x)dx} = \left[\int x e^{-x} dx + C_1 \right] e^x = C_1 e^x - (x+1).$$

Thay $z = y'$, ta có: $y' = C_1 e^x - (x+1) \Rightarrow y = C_1 e^x - \dfrac{x^2}{2} - x + C_2$ với C_1, C_2 tùy ý.

\+ *Phương trình có dạng $y'' = f(y, y')$ (thiếu x)*

Cách giải: đặt $y' = z$ (hàm theo y), đạo hàm theo x, ta có: $y'' = z'_y \cdot y' = z' \cdot z$, nên: $z' \cdot z = f(y, z)$.

Giải phương trình cấp 1 của z theo biến y, ta có: $z = \psi(y, C_1)$, thay $z = y'$ rồi giải tiếp phương trình $y' = \psi(y, C_1)$ ta có nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.

Ví dụ 3. Giải phương trình:

$$(1-y)y'' + 2(y')^2 = 0 \tag{1}$$

Đặt $y' = z$ (theo y) $\Rightarrow y'' = z'y' = z'z$ (với $z' = \dfrac{dz}{dy}$), ta có:

$$(1-y)z'z + 2z^2 = 0 \tag{2}$$

\+ Nếu $z \equiv 0 \Rightarrow z' = 0$: (2) thỏa mãn nên $z \equiv 0$ là nghiệm của (2)$\Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C_1$ (với C_1 tùy ý) là nghiệm của (1)

\+ Nếu $1 - y \equiv 0 \Leftrightarrow y \equiv 1 \Rightarrow y' = 0$: (1) thỏa mãn nên $y = 1$ là nghiệm (1) (trường hợp riêng của nghiệm $y = C_1$)

\+ Nếu $y \not\equiv C_1 \Leftrightarrow z \not\equiv 0$:

(2)$\Rightarrow (1-y)\dfrac{dz}{dy} = -2z \Rightarrow \dfrac{dz}{z} = \dfrac{2dy}{y-1} \Rightarrow \ln|z| = 2\ln|y-1| + \ln|C_1|$

Suy ra: $z = y' = C_1(y-1)^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{(y-1)^2} = C_1 dx \Rightarrow -\dfrac{1}{y-1} = C_1 x + C_2$.

Vậy (1) có nghiệm: $\left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{C_1 x + C_2} + 1; C_1 \neq 0, C_2 \text{ tùy ý} \\ y = C_1, C_1 \text{ tùy ý} \end{array} \right.$

2.2. ***Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng***

Là phương trình có dạng $y'' + py' + qy = f(x)$ trong đó p, q là hằng số thực. * *Đối với phương trình thuần nhất ($f(x) = 0$)*:

Giải phương trình đặc trưng: $$k^2 + pk + q = 0. \qquad \text{(DT)}$$

+ Nếu (DT) có 2 nghiệm thực phân biệt k_1, k_2 thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:
$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$
+ Nếu (DT) có nghiệm kép $k_1 = k_2$ thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:
$$y = (C_1 + C_2 x)e^{k_1 x}.$$
+ Nếu (DT) có 2 nghiệm phức $k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i$ thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:
$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

* *Đối với phương trình không thuần nhất $y'' + py' + qy = f(x)$ (vế phải có dạng đặc biệt)*:

Bước 1: Giải phương trình thuần nhất tương ứng, tìm nghiệm tổng quát dưới dạng: $\overline{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

Bước 2: Tìm nghiệm riêng y^* của phương trình không thuần nhất để suy ra nghiệm $y = \overline{y} + y^*$

+ Nếu $f(x)$ có dạng $P_n(x)e^{ax}$ ($P_n(x)$ là đa thức bậc n):
  − Nếu a không phải là nghiệm của (DT) thì y^* có dạng:
  $$y^* = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_o)e^{ax}$$
  − Nếu a là nghiệm đơn của (DT) thì y^* có dạng:
  $$y^* = x(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_o)e^{ax}$$
  − Nếu a là nghiệm kép của (DT) thì y^* có dạng:
  $$y^* = x^2(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_o)e^{ax}$$
+ Nếu $f(x)$ có dạng $e^{ax}[P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx]$: ($P_n(x), Q_m(x)$ là các đa thức bậc n, m), đặt $h = \max\{m, n\}$:
  − Nếu $a + bi$ không phải là nghiệm của (DT) thì y^* có dạng:
  $$y^* = \left[(a_h x^h + \cdots + a_1 x + a_o)\cos bx + (b_h x^h + \cdots + b_1 x + b_o)\sin bx\right] e^{ax}$$
  − Nếu $a + bi$ là nghiệm của (DT) thì y^* có dạng:
  $$y^* = x.\left[(a_h x^h + \cdots + a_1 x + a_o)\cos bx + (b_h x^h + \cdots + b_1 x + b_o)\sin bx\right] e^{ax}$$

Để xác định các số a_i, b_i ở trên, ta dùng phương pháp hệ số bất định: tính $y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ rồi thay $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ vào phương trình không thuần nhất, đồng nhất hai vế và giải hệ phương trình theo a_i, b_i.

+ ***Nguyên lý chồng chất nghiệm***: *Nếu $y_1(x), y_2(x)$ lần lượt là nghiệm riêng của các phương trình $y'' + p(x).y' + q(x).y = f_1(x)$ và $y'' + p(x).y' + q(x).y = f_2(x)$ thì $y_1(x) + y_2(x)$ là nghiệm riêng của $y'' + p(x).y' + q(x).y = f_1(x) + f_2(x)$.*

Ví dụ 1. Giải phương trình:

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x} \tag{1}$$

Phương trình đặc trưng $k^2 - 2k - 3 = 0$ có nghiệm $\left[\begin{array}{l} k_1 = -1 \\ k_2 = 3 \end{array}\right.$ nên phương trình thuần nhất: $y'' - 2y' - 3y = 0$ có nghiệm $\overline{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$, C_1, C_2 tùy ý.

Vế phải (1) có dạng $P_n(x)e^{ax}$ với $n = 0, a = 4 \neq k_1, k_2$ nên nghiệm riêng có dạng $y^* = a_oe^{4x}$, suy ra: $\left\{\begin{array}{ll} y^{*\prime} & = 4a_oe^{4x} \\ y^{*\prime\prime} & = 16a_oe^{4x} \end{array}\right.$. Thay vào (1), ta có:

$16a_oe^{4x} - 8a_oe^{4x} - 3a_oe^{4x} = e^{4x} \Rightarrow a_o = \dfrac{1}{5}$, suy ra:

$y = \overline{y} + y^* = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + \dfrac{1}{5}e^{4x}, \forall C_1, C_2.$

Ví dụ 2. Giải phương trình:

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x \tag{2}$$

Phương trình đặc trưng $k^2 - 2k + 1 = 0$ có nghiệm kép $k_1 = k_2 = 1$ nên phương trình thuần nhất: $y'' - 2y' + y = 0$ có nghiệm $\overline{y} = (C_1x + C_2)e^x$, C_1, C_2 tùy ý.

Vế phải (2) có dạng $P_n(x)e^{ax}$ với $n = 1, a = 1 = k_1 = k_2$ nên nghiệm riêng có dạng $y^* = x^2(a_1x + a_o)e^x$, suy ra: $\left\{\begin{array}{ll} y^{*\prime} & = [a_1x^3 + (3a_1 + a_o)x^2 + 2a_ox]e^x \\ y^{*\prime\prime} & = [a_1x^3 + (6a_1 + a_o)x^2 + (6a_1 + 4a_o)x + 2a_o]e^x \end{array}\right.$.

Thay vào (2), ta có: $\left\{\begin{array}{ll} 6a_1 & = 6 \\ 2a_o & = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} a_1 & = 1 \\ a_o & = 0 \end{array}\right. \Rightarrow y^* = x^3e^x$ nên (2) có nghiệm:

$$y = \overline{y} + y^* = (C_1x + C_2)e^x + x^3e^x = (C_1x + C_2 + x^3)e^x, \forall C_1, C_2$$

Ví dụ 3. Giải p[hương trình:

$$y'' + y = 4xe^x \tag{3}$$

Phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0$ có nghiệm $k = \pm i$ nên phương trình thuần nhất: $y'' + y = 0$ có nghiệm $\overline{y} = e^{0x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, C_1, C_2 tùy ý.

Vế phải (3) có dạng $P_n(x)e^{ax}$ với $n = 1, a = 1 \neq k_1, k_2$ nên nghiệm riêng có dạng:

$y^* = (a_1x + a_o)e^x$, suy ra: $\left\{\begin{array}{ll} y^{*\prime} & = (a_1x + a_1 + a_o)e^x \\ y^{*\prime\prime} & = (a_1x + 2a_1 + a_o)e^x \end{array}\right.$.

Thay vào (3), ta có: $2a_1x + 2a_1 + 2a_o = 4x$. Đồng nhất 2 vế:

$\left\{\begin{array}{ll} a_1 & = 2 \\ a_1 + a_o & = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} a_1 & = 2 \\ a_o & = -2 \end{array}\right. \Rightarrow y^* = (2x - 2)e^x$ nên (2) có nghiệm:

$$y = \overline{y} + y^* = (C_1 \sin x + C_2 \cos x) + (2x - 2)e^x, \forall C_1, C_2$$

Ví dụ 4. Giải phương trình:

$$y'' - y = 2e^x - x^2 \tag{4}$$

Phương trình đặc trưng $k^2 - 1 = 0$ có nghiệm $k = \pm 1$ nên phương trình thuần nhất: $y'' - y = 0$ có nghiệm $\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{-x}$, C_1, C_2 tùy ý.

Theo nguyên lý chồng chất nghiệm, nghiệm riêng của (4) là tổng hai nghiệm riêng của hai phương trình sau: $\begin{cases} y'' - y = 2e^x & (4a) \\ y'' - y = -x^2 & (4b) \end{cases}$

Vế phải (4a) có dạng $P_n(x)e^{ax}$ với $n = 0, a = 1 = k_1$ nên nghiệm riêng có dạng:

$y_1^* = x(a_o)e^x = a_o x e^x$, suy ra: $\begin{cases} {y_1^*}' &= (a_o x + a_o)e^x \\ {y_1^*}'' &= (a_o x + 2a_o)e^x \end{cases}$.

Thay vào (4a), ta có: $(a_o x + 2a_o - a_o x)e^x = 2e^x \Rightarrow a_o = 1$, nên $y_1^* = xe^x$

Vế phải (4b) có dạng $P_n(x)e^{ax}$ với $n = 2, a = 0 \neq k_1, k_2$ nên nghiệm riêng có dạng:

$y_2^* = a_2x^2 + a_1x + a_o$, suy ra: $\begin{cases} {y_2^*}' &= 2a_2x + a_1 \\ {y_2^*}'' &= 2a_2 \end{cases} \overset{(4b)}{\Rightarrow} \begin{cases} a_2 &= 1 \\ a_1 &= 0 \\ a_o &= 2 \end{cases} \Rightarrow y_2^* = x^2 + 2.$

Suy ra nghiệm riêng của (4) là: $y^* = y_1^* + y_2^* = xe^x + x^2 + 2$ và nghiệm tổng quát:

$$y = \overline{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x + x^2 + 2, \forall C_1, C_2$$

BÀI TẬP

4.2.1. *Giải các phương trình vi phân cấp 2 sau (dạng giảm cấp):*

$xy'' = y'$; $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$; $x^2y'' = {y'}^2$; $y^3y'' = 1$; $y''(e^x + 1) + y' = 0$; $(x \ln x)y'' - y' = 0$; $x^2y'' + 3xy' = 0$; $1 + {y'}^2 = 2yy''$; $yy'' - {y'}^2 = 0$

4.2.2. *Giải các phương trình vi phân cấp 2 sau (dạng tuyến tính với hệ số hằng):*

$y'' - 2y' + y = e^x$; $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$; $y'' - 2y' + 2y = 2x^2$; $y'' + y' - 2y = xe^x$; $y'' - 3y' + 2y = e^x(2x + 3)$; $y'' - y' - x$; $y'' - 6y' + 5y = 3e^x + 5x^2$; $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$; $y'' + y = \sin x \cos 3x$; $y'' - 2y' - 3y = 3 - 4e^x$

-ooOoo-

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

1. Lương Hà. 2002. Giáo trình Hàm nhiều biến số. Trung tân Đào tạo Từ Xa, Đại học Huế.

2. Lê Tự Hỷ. 1974. Giáo trình Giải tích, Viện Đại học Huế.

3. Lê Viết Ngư, Phan văn Danh. 2000. Toán học cao cấp (chuyên ngành Sinh, Y, Nông Lâm). NXB Giáo dục.

4. Thái Xuân Tiên, Đặng Ngọc Dục. 2002. Toán cao cấp (phần Giải tích). Trung tâm Đào tạo Từ Xa, Đại học Huế.

5. Nguyễn Đình Trí và cộng sự. 1983. Toán học cao cấp. Tập I,II,III. NXB Đại học và THCN.

Tiếng Anh

6. P.E. Danko, A.G. Popov. 1996. Bài tập Toán cao cấp (bản dịch). NXB Giáo dục.

7. G.Dorofeev, M.Potapov, N.Rozov. 1976. Elementary mathematics. Mir Publisher.

8. Liasko. 1979. Giải tích toán học (bản dịch). Tập I. NXB Đại học và THCN.