

BÀI TẬP PHƯƠNG PHÁP TÍNH

Lê Xuân Trường

Ngày 10 tháng 3 năm 2008

SAI SỐ

Bài 1. Cho các số gần đúng $a = 1,8921$ và $b = 22,351$ với các sai số tương đối lần lượt là $\delta_a = 0,1 \cdot 10^{-2}$ và $\delta_b = 0,1$. Tìm sai số tuyệt đối và các chữ số chắc của a, b .

Bài 2. Biết rằng $a = 12,3057$ là một số gần đúng có hai chữ số không chắc. Hãy tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của a .

Bài 3. Cho $a = 23,35781$ là số gần đúng với sai số tương đối là $\delta_a = 1,25\%$. Hãy làm tròn số a với 2 chữ số không chắc và đánh giá sai số của kết quả thu được.

Bài 4. Sử dụng một thước đo với sai số ϵ để đo các cạnh của một hình thang ta thu được kết quả sau

đáy lớn $a = 17,247\text{cm}$ đáy bé $b = 9,148\text{cm}$ chiều cao $h = 5,736\text{cm}$.

- Tính diện tích hình thang và sai số tuyệt đối của nó nếu $\epsilon = 0,01$.
- Để tính diện tích với sai số tương đối là $0,1\%$ thì ϵ bằng bao nhiêu?

Bài 5. Cho hàm số

$$u = \frac{x + y^2}{z}.$$

Tính giá trị của u cùng với sai số tuyệt đối và sai số tương đối của nó tại $x = 3,28$; $y = 0,932$ và $z = 1,132$ biết rằng x, y, z là các số gần đúng với 1 chữ số không chắc.

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH $f(x) = 0$

Bài 6. Dùng phương pháp chia đôi, hãy tìm nghiệm của phương trình $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$ với sai số 10^{-3} trong khoảng phân ly nghiệm $(-3; -2)$.

Bài 7. Cho biết phương trình $x^2 - e^x + 10 = 0$ có một nghiệm duy nhất $\xi \in (2; 3)$. Tìm ξ bằng phương pháp lặp đơn trong các trường hợp sau

- sử dụng 3 bước lặp. Cho biết sai số.
- nghiệm gần đúng có 4 chữ số chắc.
- nghiệm gần đúng có sai số không quá 10^{-5} .

Bài 8. Phương trình $x^3 + x - 1000 = 0$ có nghiệm duy nhất $\xi \in (9; 10)$. Lấy $x_0 \in (9, 10)$. Xét dãy lặp sau

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), n = 1, 2, \dots$$

trong đó $\varphi(x) = \sqrt[3]{1000 - x}$. Xác định n để sai số $|x_n - \xi| \leq 10^{-6}$.

Bài 9. Phương trình $x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$ có một nghiệm $\xi \in (-11; -10)$. Sử dụng phương pháp tiếp tuyến hãy tính gần đúng ξ với

- hai bước lặp. Đánh giá sai số.
- 4 chữ số chắc.
- sai số không quá 10^{-4} .

Bài 10. Phương trình $x^2 - 2 \sin x - \frac{1}{2} = 0$ có nghiệm $\xi \in (1; 2)$. Sử dụng phương pháp tiếp tuyến tính gần đúng ξ với sai số 10^{-3} .

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài 11. Cho hệ phương trình

$$\begin{bmatrix} 10,9 & 1,2 & 2,1 & 0,9 \\ 1,2 & 11,2 & 1,5 & 2,5 \\ 2,1 & 1,5 & 9,8 & 1,3 \\ 0,9 & 2,5 & 1,3 & 21,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7,0 \\ 5,3 \\ 10,3 \\ 24,3 \end{bmatrix} \quad (*)$$

Giải phương hệ (*) bằng phương pháp lặp đơn với 3 bước lặp. Đánh giá sai số của nghiệm. Để thu được nghiệm với sai số 10^{-3} thì cần bao nhiêu bước lặp?

Bài 12. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp lặp Seidel với sai số 0,01

$$\begin{cases} 6x - y - z = 11,33 \\ -x + 6y - z = 32 \\ -x - y + 6z = 42 \end{cases}$$

PHÉP NỘI SUY. PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG BÉ NHẤT

Bài 13. Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[0; 5]$ và được cho bởi bảng giá trị sau

x	0	1	3	5
y = f(x)	1	2	1	4

Hãy xây dựng đa thức nội suy Lagrange $L_3(x)$ của $f(x)$ và tính gần đúng giá trị $f(2)$ bằng cách lấy $f(2) \approx L_3(2)$.

Bài 14. Xây dựng đa thức Lagrange cho hàm $f(x) = x^3 + x^2 - 10$ tại các nút $x = -4; -3; -1; 0$. Từ đó, hãy xác định các hằng số A, B, C, D sao cho

$$\frac{x^3 + x^2 - 10}{x(x+1)(x+3)(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{x+4}.$$

Bài 15. Tính tổng

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

biết rằng S_n là một đa thức bậc 4.

Bài 16. Cho bảng giá trị của hàm $y = f(x)$

x	-1	0	3	6	7
y	3	-6	39	822	1611

Xây dựng đa thức nội suy Newton của hàm $f(x)$. Tính gần đúng $f(-0,25)$ nhờ đa thức vừa tìm được.

Bài 17. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định bởi bảng giá trị sau

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	1,4	1,3	1,4	1,1	1,3	1,8	1,6	2,3

Tìm biểu thức của $f(x)$ bằng phương pháp bình phương tối thiểu biết rằng

- a) $f(x)$ là một đa thức bậc nhất.
- b) $f(x)$ là một đa thức bậc hai.
- c) $f(x) = ae^{bx}$.
- d) $f(x) = \ln(ax + b)$.

Bài 18. Tìm a, b sao cho

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |x^2 + ax + b|$$

là bé nhất

TÍNH GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Bài 19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định bởi bảng giá trị

x	0,98	1,00	1,02
y=f(x)	0,7739332	0,7651977	0,7653321

Tính gần đúng $f'(1)$.

Bài 20. Xét tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{2x+1}$.

- a) Tính I bằng công thức hình thang với 10 đoạn chia và đánh giá sai số.
- b) Tính I bằng công thức hình thang với sai số không quá 10^{-4} .
- c) Để tính I bằng công thức hình thang với 10 chữ số chắc thì số đoạn chia tối thiểu là bao nhiêu?

Bài 21. Giải bài 20 bằng cách sử dụng công thức Simpson.

Bài 22. Cho tích phân

$$I = \int_{2,1}^{3,1} \frac{x^3}{x-1} dx.$$

Để tính gần đúng I bằng công thức Simpson, cần chia đoạn $[2,1; 3,1]$ thành bao nhiêu đoạn con bằng nhau để có sai số không quá 10^{-4} .

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Bài 23. Xét bài toán Cauchy $\begin{cases} y' = y - \frac{2x}{y}, 0 < x < 1, \\ y(0) = 1 \end{cases}$ (*). Sử dụng phương

pháp Euler, hãy

- a) Giải bài toán (*) với bước lưới $h = 0,2$. Từ đó, hãy tìm một đa thức bậc 5 xấp xỉ nghiệm $y(x)$.
- b) Tính gần đúng giá trị $y(0,15)$ với bước lưới $h = 0,05$.

Bài 24. Tương tự bài 23 nhưng sử dụng phương pháp Euler cải tiến.

Bài 25. Xét bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin(x + y^2), 1 < x < 2, \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp Runge - Kutta bậc 2, với bước lưới $h = 0,25$, hãy giải bài toán trên. Từ đó xấp xỉ nghiệm $y(x)$ bởi một đa thức bậc 2 bằng phương pháp bình phương tối thiểu.

Bài 25. Giải bài toán 25 bằng phương pháp Runge - Kutta bậc 4.

Hết