Chương I

TÍNH GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

1. KHÁI NIỆM SỐ GẦN ĐÚNG

Trong thực tế chúng ta thường phải xử lý phải tính toán với các đại lượng như các số đo vật lý, các dữ liệu ban đầu, đó là các số được làm tròn với sai số nào đó, tức là các số gần đúng. Việc ước lượng sai số hợp lý cho phép ta đánh giá được chất lượng của quá trình tính toán, quyết định số chữ số giữ lại trong các phép tính trung gian và trong kết quả cuối cùng.

1.1 Sai số tuyệt đối và sai số tương đối.

1.1.1 Sai số tuyệt đối.

Nếu số gần đúng a có giá trị đúng là a_0 thì ta nói a xấp xỉ a_0 hay a là số gần đúng của a_0. Khi đó sai số của a là

$$E_a = a - a_0 \tag{1.1}$$

Nhưng giá trị này nói chung ta không biết được mà chỉ ước lượng được cận trên của giá trị tuyết đối của nó.

Định nghĩa. Giá trị ước lượng Δa sao cho:

$$|a - a_0| \le \Delta a \tag{1.2}$$

được gọi là *sai số tuyệt đố*i của số gần đúng a.

Sai số tuyệt đối nhỏ nhất có thể biết được gọi là sai số tuyệt đối giới hạn của a. Thông thường ước lượng sai số tuyệt đối giới hạn là rất khó và nhiều khi không cần thiết nên người ta chỉ cần ước lượng sai số tuyệt đối đủ nhỏ và dùng từ 1 đến 3 chữ số có nghĩa (là số chữ số bắt đầu từ chữ số khác không đầu tiên từ trái sang phải) để biểu diễn sai số tuyệt đối của số gần đúng.

Thay cho biểu thức (1.2) người ta còn dùng biểu diễn sau để chỉ sai số tuyệt đối:

$$a = a_0 \pm \Delta a \tag{1.3}$$

Ví dụ: Một mảnh đất hình chữ nhất có chiều dài d=15,45m và chiều rộng r=3,94m với sai số 1cm. Khi đó ta hiểu là:

$$\Delta d = 0{,}01\text{m hay } d = 15{,}45\text{m} \pm 0{,}01\text{m}$$

$$\Delta r = 0{,}01\text{m hay } r = 3{,}94\text{m} \pm 0{,}01\text{m}$$

Khi đó diện tích của mảnh đất được tính là:

$$S = d.r = 15{,}45 \;.\; 3{,}94 \text{ m} = 60{,}873 \text{ m}^2$$

với cận trên là (15,45+0,01) .(3,94+0,01) = 61,067 m^2

và cận dưới là (15,45-0,01) (3,94-0,01) = 60,679m^2

hay $60{,}679 \leq S \leq 61{,}067$

Vậy ước lượng sai số tuyệt đối của S là:

$$| S-S_0| \leq 0{,}194 \text{ m}^2$$

hay làm tròn 0,2 m^2 .

1.1.2 Sai số tương đối.

Hai số gần đúng có sai số tuyệt đối bằng nhau sẽ có "mức độ chính xác khác nhau nếu số độ lớn của chúng khác nhau. Số bé hơn sẽ có độ chính xác kém hơn.

Định nghĩa: Sai số tương đối của số gần đúng a (được ký hiệu là δa) là tỷ số giữa sai số tuyệt đối và giá trị tuyệt đối của nó:

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|a|} \qquad (1.4)$$

Thường sai số tương đối được biễu diễn dưới dạng % với 2 hoặc 3 chữ số.

Dễ thấy:

$$\Delta a = |a|\, \delta a \qquad (1.5)$$

nên chỉ cần biết một trong hai loại sai số là tính đợc loại kia.

Ví dụ: Nếu a=57 và Δa = 0,5 thì δa= 0,0087719 hoặc 0,88%

1.2 Các loại sai số khác

Ví dụ: Một vật thể rơi tự do từ độ cao H_0 với vận tốc ban đầu v_0 (được đo bằng một thiết bị nào đó). Tính độ cao H(t) của nó tại thời điểm t.

Bài giải: Giả sử ngoại lực tác dụng vào vật là F(t) (gồm lực hút trọng trường và lực cản của không khí,..), khối lượng vật thể là m, khi đó H(t) là nghiệm của phương trình vi phân sau:

$$m\, H''(t) = -F(t) \qquad (1.6)$$

với điều kiện ban đầu là: $H(0) = H_0$; $H'(0) = -v_0$.

Ta chọn phương pháp gần đúng để giải phương trình này. Chẳng hạn để đơn giản ta giả thiết chỉ có trọng lực tác dụng lên vật và F(t) = mg không đổi. Khi đó ta có ngay:

$$H(t) = H_0 - gt^2/2 - v_0 t$$

Ta thấy sai số của kết quả nhận được chịu ảnh hưởng của các số đo H_0, v_0; cách lập luận để xác định F(t), phương pháp giải phương trình và các yếu tố khác. Chính vì vậy ngời ta còn có các loại sai số sau:

- *Sai số dữ liệu* – sai số của số liệu ban đầu.
- *Sai số giả thiết*: Khi ta đơn giản hóa bài toán thực tiễn để nhận được mô hình toán học có thể giải được.
- *Sai số phương pháp*: Là phương pháp giải gần đúng phương trình nhận được theo mô hình đã chọn.
- *Sai số tính toán*: Tích lũy trong qúa trình tính toán.
- *Sai số làm tròn*: Khi tính toán thường phải làm tròn các số.
- *Sai số ngẫu nhiên*: Là sai số chịu tác dụng của quy luật ngẫu nhiên chi phối.

Chúng ta chỉ quan tâm tới sai số phương pháp và sai số tính toán.

2. BIỂU DIỄN SỐ GẦN ĐÚNG

Trong mục này chúng ta xét các số được biểu diễn trong hệ thập phân. Khi số là gần đúng thì nên biểu diễn chúng với bao nhiêu chữ số, thu gọn chúng như thế nào.

2.1 Chữ số có nghĩa.

Trong biểu diễn thập phân, các chữ số kể từ chữ số khác không đầu tiên tính từ trái sang phải là các chữ số có nghĩa, các chữ số 0 bên trái là không có nghĩa.

Nếu a được biểu diễn dưới dạng:

$$a = \sum_{k-p}^{n} a_k 10^k \qquad (1.7)$$

thì các chữ số không bên trái không xuất hiện ở biểu diễn này ($a_p \neq 0$), ý nghĩa của các chữ số 0 bên phải liên quan tới cách biểu diễn số gần đúng.

Ví dụ: Số a = 03,4050 thì số 0 trước số 3 là không có ý nghĩa, còn các chữ số 3, 4, 0, 5, 0 là có ý nghĩa. Số b= 0,034 thì 3, 4 là hai chữ số có nghĩa còn hai số 0 bên trái không có ý nghĩa vì nếu biểu diễn theo dạng (1.7) thì các chữ số này không cần đến.

2.2 Chữ số đáng tin

Định nghĩa: Nếu a có biểu diễn (1.7) với sai số $\Delta a \leq 0{,}5.\ 10^m$ thì a_k là các chữ số đáng tin với $\forall k \geq m$ (theo nghĩa hẹp dùng trong tính toán) còn khi $\Delta a < 10^m$ thì a_k với $\forall k \geq m$ gọi là đáng tin theo nghĩa rộng.

Ví dụ: a = 21,473 và Δa = 0,094 thì:

Các chữ số 2, 1 đáng tin theo nghĩa hẹp vì $\Delta a = 0,094 = 0,5.\ 0,188 < 0,5.10^0$ (m=0); chữ số 4 là đáng tin theo nghĩa rộng vì $\Delta a < 0,1$ (m=-1); Các chữ số 7, 3 là không đáng tin.

Một số gần đúng có thể cho theo 2 cách:

Cách 1: Viết chữ số gần đúng kèm với sai số tuyệt đối;

Cách 2: Chỉ viết các chữ số đáng tin. Khi viết một số gần đúng mà không cho sai số thì luôn ngầm hiểu là các chữ số có nghĩa là các chữ số đáng tin. Như vậy các chữ số 0 ở bên phải cũng là đáng tin.

Trong quá trình tính toán, người ta thường để lại vài chữ số không đáng tin và trong kết quả thì chỉ giữ lại các chữ số đáng tin theo nghĩa rộng.

2.3 Số thu gọn.

Khi số a có nhiều chữ số không đáng tin hoặc có quá nhiều chữ số có nghĩa thì người ta thường thu gọn thành số a' có ít chữ số có nghĩa hơn. Nếu a có biểu diễn (1.7) và số thu gọn giữ lại đến am (m>p) thì a' có biểu diễn:

$$a' = \sum_{k-m}^{n} a_k 10^k \qquad (1.8)$$

nhờ bỏ đi các chữ số a_k (k<m) theo Quy tắc chữ số chẵn như sau:

a) Trường hợp a>0, phần bỏ đi là μ.

Nếu $\mu < 0,5.10^m$ thì

$$a' = \sum_{k-m}^{n} a_k 10^k \qquad (1.9)$$

Nếu $\mu > 0,5.10^m$ thì:

$$a' = \sum_{k-m}^{n} a_k 10^k + 10^m \qquad (1.10)$$

Nếu $\mu = 0,5.10^m$ thì theo (1.9) nếu a_m chẵn, còn theo (1.10) nếu a_m lẻ.

b) Trường hợp a<0 thu gọn phần giá trị tuyệt đối và giữ nguyên dấu.

Khi thu gọn a thành a' ta có sai số thu gọn $\Gamma a \leq 10m$. Để nó ít ảnh hưởng tới sai số tuyệt đối người ta thường giữ lại một hai chữ số không đáng tin.

Ví dụ 1: a= 3,456789, p=-6, ta làm tròn với m=-3 khi đó phần bỏ đi :

$\mu = 0,000789 = 0,789\ 10^{-3} > 0,5\ 10^{-3}$ vậy a' =3,456 +0,001 = 3,457;

Ví dụ 2: a= 3,456 489 làm tròn với m=-3 khi đó $\mu = 0,000489 = 0,489\ 10^{-3} < 0,5\ 10^{-3}$ nên a' = 3,456;

Ví dụ 3: a =3,456500 làm tròn với m=-3 khi đó μ = 0,000500= 0,5. 10^{-3} =0,5 10^{-3} nên a' = 3,456 vì $a_m=a_{-3}$ =6 là chẵn;

Ví dụ 4: a= 3,453500 làm tròn đến 3 chữ số dưới phần lẻ. Khi đó μ = 0,000500= 0,5. 10^{-3} =0,5 10^{-3} nên a' = 3,454 vì $a_m=a_{-3}$ =3 là lẻ.

3. MỘT SỐ BÀI TOÁN ƯỚC LƯỢNG SAI SỐ

Trong phần này chúng ta xét bài toán ước lượng sai số tính toán khi thực hiện các phép toán số học và tính giá trị của các hàm 1 biến.

Cho hàm y=f(x) và x là số gần đúng của x_0; Ký hiệu Δx và Δy là sai số tuyệt đối của đối số và hàm số. Ta sẽ xét bài toán ước lượng sai số của hàm hoặc của biến nếu biết một trong hai số.

3.1 Bài toán thuận.

Bài toán: Ước lượng Δy khi biết x và Δx .

Theo công thức số gia hữu hạn Lagrange ta có:

$$|y-y_0| = f'(c)\,|x - x_0|$$

trong đó y_0 là giá trị đúng của y tại x_0, còn $c \in (x,x_0)$ nếu $x<x_0$ và $c\in(x_0,x)$ nếu $x_0<x$.

Khi Δx bé tức là khi x gần x_0 ta có ước lượng:

$$\Delta y = |f'(x)|\,|x- x_0| \text{ hay } \Delta y \le |f'(x)|\,\Delta x \qquad (1.11)$$

Ví dụ: y=ln x, ta có f'(x) = 1/x nên

$$\Delta(\ln x) = \Delta x/x = \delta x \qquad (1.12)$$

3.2 Bài toán ngược

Biết giá trị gần đúng x ta cần phải tính x với sai số Δx là bao nhiêu để đảm bảo $\Delta y \le \Delta$, với Δ là một giá trị cho trước. Từ công thức (1.11) ta thấy nếu

$$\Delta x \le \frac{\Delta}{|f'(x)|} \qquad (1.13)$$

thì đủ để $\Delta y \le \Delta$;

Ví dụ: $y = e^x$ với $x \cong 3$ để có $\Delta y \le 0{,}01$ ta tính x với $\Delta x \le \frac{0{,}01}{e^3}$ là đủ.

3.3 Sai số của tổng hoặc hiệu

Mệnh đề 1. *Sai số tuyệt đối của một tổng hay một hiệu bằng tổng các sai số tuyệt đối thành phần.*

Chứng minh: Để đơn giản ta xét u= a ± b với các số a, b có giá trị đúng a_0, b_0 và sai số tuyệt đối Δa, Δb tương ứng.

Khi đó: $a_0 - \Delta a \leq a \leq a_0 + \Delta a$

$b_0 - \Delta b \leq b \leq b_0 + \Delta b$

Do đó ta có:

$$(a_0 + b_0) - (\Delta a + \Delta b) \leq a + b \leq (a_0 + b_0) + (\Delta a + \Delta b)$$

$$(a_0 - b_0) - (\Delta a + \Delta b) \leq a - b \leq (a_0 - b_0) + (\Delta a + \Delta b)$$

Đó chính là điều phải chứng minh.

Trường hợp tổng hay hiệu của nhiều số hạng cũng được xét tương tự.

Ví dụ: Cho a=50,5, b=50,9 với Δa= Δb = 0,05 và u= a-b.

Ta có u=0,4 với Δu = 0,05 +0,05 = 0,1

Vậy δu = 0,1 / 0,4 =25%, hay trừ hai số gần bằng nhau thì hiệu sẽ có sai số tương đối là lớn.

3.4 Sai số của tích hoặc thương

Mệnh đề: *Sai số tương đối của một tích hay một thương bằng tổng các sai số tương đối thành phần.*

Chứng minh: Xét thương

$$u = \frac{x_1..x_m}{y_1..y_p}$$

Giả sử tất cả các số hạng của tích và thương đều dương. Khi đó ta có:

$$\ln u = \ln x_1 + .. + \ln x_m - \ln y_1 - .. - \ln y_p$$

Do mệnh đề trong mục 3.3 ta có:

$$\Delta(\ln u) = \Delta(\ln x_1) + .. + \Delta(\ln x_m) + \Delta(\ln y_1) + .. + \Delta(\ln y_p)$$

Và nhờ ví dụ (1.12) ta có:

$$\delta u = \delta x_1 + .. + \delta x_m + \delta y_1 + .. + \delta y_p \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ: Xét S = d.r với d=5,45 ; r= 2,94 ; Δd = Δr = 0,001

Ta có: δd = 0,0001835; δr = 0,0003401; δS = 0,0005236; S=16,023 nên ΔS=S. δS = 0,0084